Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2000)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/60) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Sea un sistema dinámico con coordenadas generalizadas libres $\{q_j, j = 1, \dots, n\}$ y Lagrangiana $L(q_j, \dot{q}_j, t)$. *Definir* la función Hamiltoniana H, estableciendo su expresión. *Escribir* en función de H las ecuaciones canónicas de Hamilton (no hace falta demostración). *Aplicar* lo anterior al caso de un oscilador armónico simple en vibraciones libres (masa m, elongación x y resorte de constante k).

Se definen en primer lugar los *momentos generalizados*, $p_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, $i = 1, \dots, n$. La *Hamiltoniana* es la función

$$\boxed{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (q_i, p_i, t) \longmapsto H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \in \mathbb{R}.} \tag{1}$$

Debe quedar claro que, en la expresión de la Hamiltoniana, deben eliminarse las velocidades generalizadas ($\dot{q}_i$) en favor de las coordenadas y momentos generalizados (q_i, p_i).

Derivando la Hamiltoniana por una parte a partir de su expresión (1) y por otra de manera genérica mediante su dependencia funcional ($H(q_i, p_i, t)$),

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}p_i \dot{q}_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t = \frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

(Se sobreentiende el sumatorio para los índices repetidos.) Identificando los coeficientes de $\mathrm{d}q_i$ y de $\mathrm{d}p_i$ en las anteriores expresiones, y considerando las ecuaciones de Lagrange, se llega a las *ecuaciones canónicas de Hamilton:*

$$\boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.} \tag{2}$$

Para el oscilador armónico simple que se propone la Lagrangiana vale, en función de la elongación x del muelle, $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$. El momento generalizado correspondiente es $p_x = m\dot{x}$, por lo que la Hamiltoniana vale $H = p_x\dot{x} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$; sin embargo para completar la respuesta es necesario eliminar de la anterior expresión $\dot{x}$ en favor de p_x, resultando

$$\boxed{H(x, p_x) = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}kx^2.} \tag{3}$$

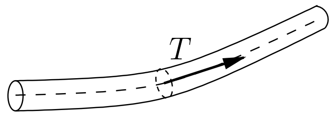
Aplicando las expresiones (2) se obtienen las ecuaciones canónicas:

$$\boxed{\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx; \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}.} \tag{4}$$

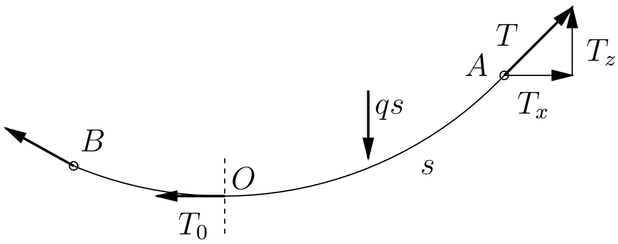
La primera de estas ecuaciones constituye la segunda ley de newton, mientras que la segunda se puede interpretar como la expresión del cambio de variables a los momentos generalizados.

Sea un cable homogéneo sometido a su propio peso. *Definir* el concepto de tensión en un punto del cable y *obtener* de forma justificada las expresiones de dicha tensión y sus componentes horizontal y vertical en un punto genérico. A partir de las expresiones anteriores *obtener* una relación entre la longitud de arco sobre la curva s y la coordenada vertical z.

En un punto de la curva directriz del cable, suponiendo una sección ideal normal a la misma, se denomina *tensión* (T) a la acción del trozo de cable que queda en la parte frontal de la sección sobre lo que queda en la parte dorsal. La cara frontal se define convencionalmente según el sentido de avance elegido para la directriz. (Es importante observar que la tensión en el cable así definida tiene dimensiones de fuerza, y no de fuerza por unidad de superficie, al contrario de la definición convencional en un medio continuo.)



Consideremos un tramo de cable BOA, entre dos puntos genéricos B y A. Supondremos el cable homogéneo, con peso por unidad de longitud q, y calcularemos la tensión en A. Estableciendo las ecuaciones de equilibrio del trozo OA, desde el vértice O (punto de tangente horizontal) de la curva de equilibrio —denominada catenaria—, y llamando s a la longitud del cable entre ambos puntos,



$$\boxed{T_z = qs} \tag{5}$$

$$\boxed{T_x = T_x|_O \stackrel{\text{def}}{=} T_0 \text{ (cte.)}} \tag{6}$$

La tensión es un vector tangente al cable en cada punto, y la ecuación diferencial del equilibrio expresa

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}s = q\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}s. \tag{7}$$

Proyectando según la tangente $\boldsymbol{t} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$ e integrando:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{t} = \mathrm{d}T = q\boldsymbol{k}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = q\mathrm{d}z \quad \Rightarrow \quad T = qz + \text{cte.}$$

Consideraremos, sin pérdida de generalidad, el origen de z situado convenientemente, a una determinada distancia a por debajo del vértice O, de forma que la constante en la expresión anterior se anule; esto permite expresar también el valor de la tensión en el vértice T_0:

$$\boxed{T = qz; \quad T_0 = qa.} \tag{8}$$

Teniendo en cuenta la relación que liga las componentes de la tensión con su módulo, dadas por (5), (6) y (8), se obtiene la expresión pedida, que debe cumplir la catenaria:

$$T^2 = T_x^2 + T_z^2 \quad \Rightarrow \quad (qz)^2 = (qa)^2 + (qs)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z^2 = a^2 + s^2.} \tag{9}$$