

Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (31 de enero de 2000)

Apellidos

Nombre

N.º

Grupo

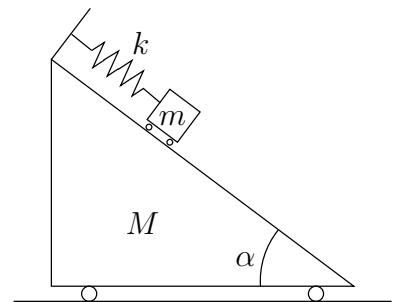
| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
|--|--|--|--|

Ejercicio 1.º (puntuación: parcial 6/30, final 10/60)

Tiempo: 30 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no se recogerá.

Enunciar el principio de D'Alembert, para un sistema formado por N partículas $\{m_i, i = 1, \dots, N\}$, sometidas a enlaces lisos. *Aplicar* dicho principio al sistema de la figura adjunta, sometido a su propio peso y a la acción del resorte lineal de constante k y longitud natural nula, desarrollando las ecuaciones de la dinámica.



Enunciado.— Sean \mathbf{r}_i las posiciones de cada partícula del sistema, y \mathbf{f}_i las resultantes de fuerzas aplicadas sobre las mismas. El principio de D'Alembert afirma que:

En un sistema material sometido a enlaces lisos, la evolución dinámica del sistema está determinada, como condición necesaria y suficiente, por la anulación en todo instante del trabajo de las fuerzas aplicadas más el trabajo de las fuerzas de inercia para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i}_{\delta W} - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ comp.} \quad (1)$$

Aplicación.— Para definir la configuración tomaremos los parámetros x , desplazamiento horizontal de la cuña M hacia la derecha, y w , desplazamiento de m según el plano inclinado, relativo a la cuña y positivo hacia abajo. Consideraremos los versores \mathbf{i} (según la coordenada x), \mathbf{j} (vertical ascendente) y \mathbf{u}_w (según la coordenada w). Las variaciones $(\delta x, \delta w)$ arbitrarias son compatibles con los enlaces del sistema, y producen los siguientes desplazamientos virtuales de cada cuerpo:

$$\delta \mathbf{r}_M = \delta x \mathbf{i}; \quad \delta \mathbf{r}_m = \delta x \mathbf{i} + \delta w \mathbf{u}_w. \quad (2)$$

Las aceleraciones son:

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = \ddot{x} \mathbf{i}; \quad \ddot{\mathbf{r}}_m = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{w} \mathbf{u}_w. \quad (3)$$

Las fuerzas aplicadas valen:

$$\mathbf{f}_M = kw\mathbf{u}_w; \quad \mathbf{f}_m = -mg\mathbf{j} - kw\mathbf{u}_w. \quad (4)$$

(Es irrelevante considerar el peso de M ya que se mueve según la horizontal y no realiza trabajo.)

El trabajo virtual de las fuerzas de inercia es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= M \ddot{\mathbf{r}}_M \cdot \delta \mathbf{r}_M + m \ddot{\mathbf{r}}_m \cdot \delta \mathbf{r}_m \\ &= M \ddot{x} \delta x + m(\ddot{x} \delta x + \ddot{w} \delta x \cos \alpha + \ddot{x} \delta w \cos \alpha + \ddot{w} \delta w). \end{aligned} \quad (5)$$

Por otra parte, el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas vale

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{f}_M \cdot \delta \mathbf{r}_M + \mathbf{f}_m \cdot \delta \mathbf{r}_m \\ &= mg \delta w \sin \alpha - kw \delta w. \end{aligned} \quad (6)$$

Igualando (5) y (6) y agrupando términos se llega a:

$$[-(M\ddot{x} + m\ddot{x} + m\ddot{w} \cos \alpha)] \delta x + [-(m\ddot{x} \cos \alpha + m\ddot{w}) + mg \sin \alpha - kw] \delta w = 0 \quad \forall (\delta x, \delta w). \quad (7)$$

Teniendo en cuenta en esta ecuación que tanto δx como δw son arbitrarios, se obtienen las dos ecuaciones diferenciales siguientes, que definen la evolución dinámica del sistema:

$$M\ddot{x} + m\ddot{x} + m\ddot{w} \cos \alpha = 0 \quad (8)$$

$$m\ddot{x} \cos \alpha + m\ddot{w} = mg \sin \alpha - kw. \quad (9)$$