Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

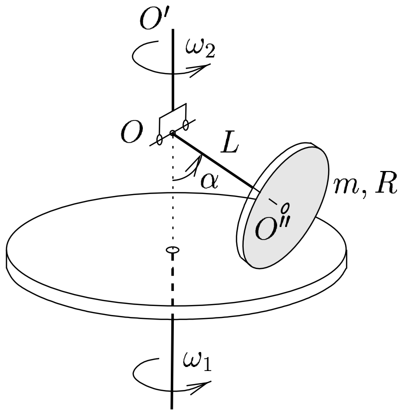
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (30 de Enero de 1999)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º ***(puntuación doble)*** Tiempo: 90 min.

Se considera un sistema compuesto por una mesa giratoria y un disco que se apoya en ella, como muestra la figura adjunta. La mesa gira con velocidad ω_1 constante alrededor de un eje vertical. Además, existe un árbol vertical OO' que gira con velocidad ω_2 constante. El disco, de masa m y radio R, está ligado al árbol OO' por un eje OO'' de longitud L y masa despreciable que pivota sin rozamiento en el punto O. La altura sobre la mesa del punto O es tal que el eje OO'' forma un ángulo α con la vertical. El disco rueda sin deslizar sobre la mesa, y se admite que no llega nunca a levantarse sobre ella. Adicionalmente, se define el triedro S formado por los vectores $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, siendo $\boldsymbol{i}$ el versor según un diámetro horizontal del disco, $\boldsymbol{j}$ según un diámetro de máxima pendiente del disco, y $\boldsymbol{k}$ el eje normal al disco.



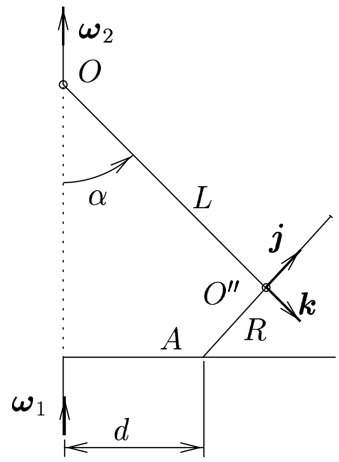
Se pide:

1. Expresar la velocidad del centro O'' del disco.
2. Expresar la velocidad de rotación del disco, tanto relativa a la mesa giratoria como absoluta, mediante sus componentes en el triedro S.
3. Describir el lugar geométrico que define el eje de rotación, tanto relativo al disco móvil como en una referencia absoluta (axoides).
4. Expresar la aceleración angular absoluta del disco.
5. Expresar el momento en el punto O de las fuerzas aplicadas al disco, considerando que la reacción de la mesa móvil sobre el disco es normal a la mesa.
6. Calcular el tensor de inercia del disco en O.
7. Expresar la ecuación de Euler en el punto O.
8. Demostrar que la reacción normal de la mesa sobre el disco vale:

$$N = \frac{1}{1 - \frac{R}{L \tan\alpha}} \left\{ mg + \omega_2 \left[I_z(\omega_2 - \omega_1)\frac{\operatorname{sen}\alpha}{R} + (I_z\omega_1 - I_x\omega_2)\frac{\cos\alpha}{L} \right] \right\},$$

siendo I_x, I_z los momentos de inercia del disco en O según las direcciones definidas por $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}$ respectivamente.

1.- Puesto que se admite que el disco nunca deja de estar en contacto con la mesa giratoria, $\alpha = cte.$ La velocidad absoluta de O'', expresada en el triedro S (ver figura adjunta, en la que $\boldsymbol{i}$ es un vector perpendicular al papel hacia adentro) es:



$$\boldsymbol{v}_{O''} = \omega_2 L \operatorname{sen}\alpha\, \boldsymbol{i}$$

2.1- Cálculo de $\boldsymbol{\omega}$ (velocidad angular relativa a la mesa). Puesto que el disco rueda sin deslizar sobre la mesa, la velocidad del punto A de contacto es nula para un observador que se mueva solidariamente con la mesa. Para este observador, el eje OO'' gira alrededor de la vertical con velocidad angular $(\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1)$. Llamando $\boldsymbol{\omega}_d = \omega_d\, \boldsymbol{k}$ a la velocidad de giro relativa del disco alrededor su eje OO'', la velocidad relativa del punto A se expresa como:

$$\boldsymbol{v}_A = [(\omega_2 - \omega_1)d + \omega_d R]\, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}$$

siendo $d = L\operatorname{sen}\alpha - R\cos\alpha$. De esta forma se obtiene la velocidad de giro del disco alrededor de su eje $\boldsymbol{\omega}_d$:

$$\boldsymbol{\omega}_d = -(\omega_2 - \omega_1)\frac{L\operatorname{sen}\alpha - R\cos\alpha}{R}\boldsymbol{k},$$

con lo que la velocidad angular relativa total resulta:

$$\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1) + \boldsymbol{\omega}_d = (\omega_2 - \omega_1)\operatorname{sen}\alpha(\boldsymbol{j} - \frac{L}{R}\boldsymbol{k})$$

2.2.- Cálculo de $\boldsymbol{\Omega}$ (velocidad angular absoluta). Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\Omega}_{abs} = \boldsymbol{\Omega}_{rel} + \boldsymbol{\Omega}_{ref}$, obtenemos:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_1 = (\omega_2 - \omega_1)\operatorname{sen}\alpha(\boldsymbol{j} - \frac{L}{R}\boldsymbol{k}) + \omega_1(\operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{j} - \cos\alpha\boldsymbol{k}) =$$
$$= \omega_2\operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{j} - \left[\frac{L}{R}(\omega_2 - \omega_1)\operatorname{sen}\alpha + \omega_1\cos\alpha\right]\boldsymbol{k}$$

3.- Axoides del movimiento del disco:

1. *Axoide fijo.* Cono de vértice O y eje vertical. Su semiángulo cónico es el ángulo (γ) que forma el vector $\boldsymbol{\Omega}$ con la vertical.

2. *Axoide móvil.* Cono de vértice O y eje OO''. Su semiángulo cónico es $\alpha - \gamma$.

4.- Para calcular la aceleración angular absoluta, calculamos la derivada de $\boldsymbol{\Omega}$ a partir de la derivada relativa al triedro S (que es nula), más el término debido a la rotación del triedro S (que gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_2$):

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \underbrace{\left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_S}_{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{\omega}_2 \wedge \boldsymbol{\Omega} = -\omega_2(\omega_2 - \omega_1)\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{L}{R}\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha\right)\boldsymbol{i}$$

5.- El momento en O de las fuerzas aplicadas sobre el disco es el mismo que el de las fuerzas aplicadas sobre el sólido rígido formado por el disco y el eje OO''. Ésto es debido a que el eje OO'' no tiene masa, y la reacción de éste sobre el disco lleva la dirección del propio eje OO''.

Las únicas fuerzas aplicadas que dan momento son la reacción (N) del suelo (que se supone vertical) y el peso, obteniéndose la expresión:

$$\boldsymbol{M}_O = [mgL \operatorname{sen}\alpha - N\,(L\operatorname{sen}\alpha - R\cos\alpha)]\,\boldsymbol{i}$$

6.- El tensor de inercia en O se obtiene mediante el teorema de Steiner, resultando:

$$\boldsymbol{I}_O = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}, \qquad I_x = I_y = m\left(\frac{R^2}{4} + L^2\right), \qquad I_z = m\frac{R^2}{2}$$

7.- La forma más simple de plantear la ecuación de Euler es emplear el triedro intermedio S, ya que las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ en él son constantes:

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_O\boldsymbol{\Omega}\right) = \boldsymbol{I}_O \underbrace{\left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_S}_{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{\omega}_2 \wedge \left(\boldsymbol{I}_O\boldsymbol{\Omega}\right)$$

Introduciendo en la expresión anterior las expresiones de $\boldsymbol{M}_O$, $\boldsymbol{I}_O$ y $\boldsymbol{\Omega}$ calculadas anteriormente, resulta:

$$\begin{aligned}&[mgL\operatorname{sen}\alpha - N\,(L\operatorname{sen}\alpha - R\cos\alpha)]\,\boldsymbol{i} = \\ &\qquad = \left[\omega_2^2 I_x \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \omega_2 I_z \operatorname{sen}\alpha\left(\frac{L}{R}(\omega_2-\omega_1)\operatorname{sen}\alpha + \omega_1\cos\alpha\right)\right]\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

8.- Despejando N de la expresión anterior y operando se deduce la expresión pedida:

$$N = \frac{1}{1 - \frac{R}{L\tan\alpha}}\left\{mg + \omega_2\left[I_z(\omega_2-\omega_1)\frac{\operatorname{sen}\alpha}{R} + (I_z\omega_1 - I_x\omega_2)\frac{\cos\alpha}{L}\right]\right\},$$