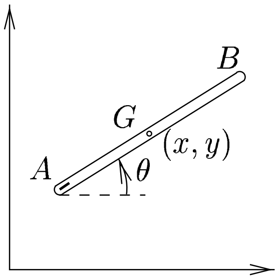
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

# Mecánica

EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (30 de Enero de 1999)

*Apellidos* *Nombre* *N.º* *Grupo*

*Ejercicio 3.º* Tiempo: 45 min.




Una barra homogénea $AB$ de masa $m$ y longitud $l$ se mueve en un plano horizontal. En el extremo $A$ tiene un apoyo en forma de pequeña cuchilla, que impide el movimiento de dicho punto en dirección perpendicular a la varilla.

Se pide:

1. Expresar la ecuación de ligadura anholónoma.
2. Usando $(x, y, \theta)$ como coordenadas, obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento. Emplear para ello el formalismo de la dinámica analítica, haciendo uso de la técnica de multiplicadores de Lagrange para eliminar la citada ligadura.
3. Demostrar que el multiplicador de Lagrange $\lambda$ representa la fuerza transversal de restricción en ese punto.

---

**1.** La ecuación de la ligadura anholónoma se obtiene imponiendo que la velocidad de $A$ en la dirección transversal a la barra sea nula:

$$\boxed{\boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{n} = 0} \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{v}_A$ la velocidad del punto $A$ y $\boldsymbol{n}$ la normal a la barra. Si se expresan ambos vectores en función de las coordenadas $(x, y, \theta)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_A &= \boldsymbol{v}_G + \dot{\theta}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{GA} = (\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{i} + (\dot{y} - \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{n} &= -\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

se obtiene la ecuación pedida:

$$\boxed{\dot{x}\operatorname{sen}\theta - \dot{y}\cos\theta + \frac{l}{2}\dot{\theta} = 0} \tag{2}$$

**2.** Empleando el multiplicador $\lambda$ para eliminar la ligadura las ecuaciones de Lagrange se expresan del siguiente modo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \lambda A^j,$$

donde $\{q_j\} = \{x, y, \theta\}$ y $A^j\delta q_j = \delta x \operatorname{sen}\theta - \delta y\cos\theta + \frac{l}{2}\delta\theta$, de modo que $A^x = \operatorname{sen}\theta$, $A^y = -\cos\theta$, y $A^\theta = l/2$.

A partir de la función lagrangiana

$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{ml^2}{24}\dot{\theta}^2,$$

y de la ecuación de ligadura (2) se obtienen las ecuaciones diferenciales del movimiento siguientes:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \operatorname{sen}\theta \\ m\ddot{y} &= -\lambda\cos\theta \\ \frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta} &= \lambda\frac{l}{2} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\dot{x}\operatorname{sen}\theta - \dot{y}\cos\theta + \frac{l}{2}\dot{\theta} = 0 \tag{4}$$

(4 ecuaciones para las 4 incógnitas $(x, y, \theta, \lambda)$.)

**3.** La fuerza de restricción en $A$ es normal a la barra, $\boldsymbol{R}_A = R\,\boldsymbol{n}$, por lo que las ecuaciones de Newton-Euler $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_G$ y $M_G = I_G\ddot{\theta}$ resultan:

$$\left.\begin{aligned} -R\operatorname{sen}\theta &= m\ddot{x} \\ R\cos\theta &= m\ddot{y} \\ -R\frac{l}{2} &= \frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Si se comparan (5) con las obtenidas antes (3), se comprueba que son idénticas estableciendo $\lambda = -R$.