Mecánica

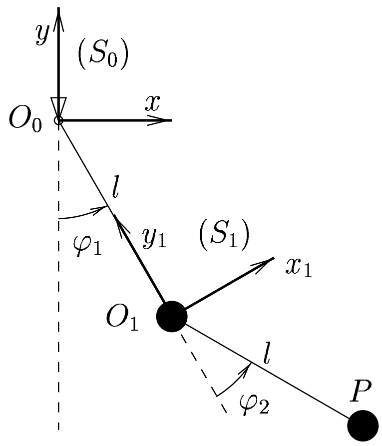
EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (30 de Enero de 1999)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

De un punto P se conoce su movimiento relativo a un sistema de referencia S_1, $\boldsymbol{v}_{P/S_1}(t)$. A su vez S_1 se mueve respecto de otro sistema de referencia S_0 con velocidad $\boldsymbol{v}_{O_1/S_0}(t)$ de su origen y velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}_{S_1/S_0}(t)$. 1) *Expresar* para un caso general la velocidad y aceleración de P respecto a S_0, $\boldsymbol{v}_{P/S_0}$ y $\boldsymbol{a}_{P/S_0}$. 2) *Aplicar* para el caso particular de la figura, en el que el sistema S_0 es fijo con origen en O_0 y S_1 con origen en O_1 gira solidariamente a la varilla O_0O_1, *calculando* $\boldsymbol{v}_{P/S_1}$, $\boldsymbol{a}_{P/S_1}$, $\boldsymbol{v}_{P/S_0}$ y $\boldsymbol{a}_{P/S_0}$ en función de los parámetros (φ_1, φ_2). (5 puntos.)



---

1) Llamando $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{P}$, las expresiones generales son:

$$\boldsymbol{v}_{P/S_0} = \underbrace{\boldsymbol{v}_{O_1/S_0} + \boldsymbol{\Omega}_{S_1/S_0} \wedge \boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{v}_{\text{arr}}} + \underbrace{\boldsymbol{v}_{P/S_1}}_{\boldsymbol{v}_{\text{rel}}}$$

$$\boldsymbol{a}_{P/S_0} = \underbrace{\boldsymbol{a}_{O_1/S_0} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{S_1/S_0} \wedge \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega}_{S_1/S_0} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{S_1/S_0} \wedge \boldsymbol{r})}_{\boldsymbol{a}_{\text{arr}}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega}_{S_1/S_0} \wedge \boldsymbol{v}_{P/S_1}}_{\boldsymbol{a}_{\text{cor}}} + \underbrace{\boldsymbol{a}_{P/S_1}}_{\boldsymbol{a}_{\text{rel}}}$$

2) Para el caso de la figura, la velocidad y aceleración relativas son:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{\text{rel}} &= \boldsymbol{v}_{P/S_1} = l\dot{\varphi}_2(\cos\varphi_2\,\boldsymbol{i}_1 + \operatorname{sen}\varphi_2\,\boldsymbol{j}_1)\\
\boldsymbol{a}_{\text{rel}} &= \boldsymbol{a}_{P/S_1} = l\dot{\varphi}_2^2(-\operatorname{sen}\varphi_2\,\boldsymbol{i}_1 + \cos\varphi_2\,\boldsymbol{j}_1) + l\ddot{\varphi}_2(\cos\varphi_2\,\boldsymbol{i}_1 + \operatorname{sen}\varphi_2\,\boldsymbol{j}_1)
\end{aligned}$$

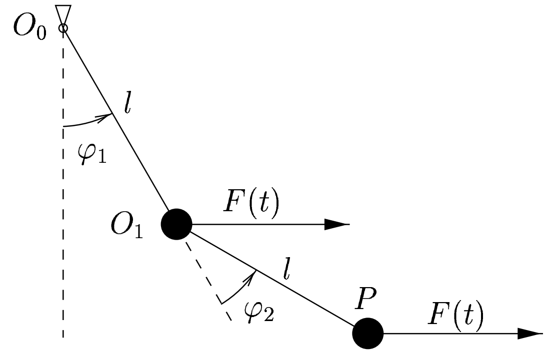
Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\Omega}_{S_1/S_0} = \dot{\varphi}_1\boldsymbol{k}$ y que $\boldsymbol{v}_{O_1/S_0} = l\dot{\varphi}_1\boldsymbol{i}_1$, resulta:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{\text{arr}} &= l\dot{\varphi}_1\left[(1+\cos\varphi_2)\boldsymbol{i}_1 + \operatorname{sen}\varphi_2\,\boldsymbol{j}_1\right]\\
\boldsymbol{a}_{\text{arr}} &= l\ddot{\varphi}_1\left[(1+\cos\varphi_2)\boldsymbol{i}_1 + \operatorname{sen}\varphi_2\,\boldsymbol{j}_1\right] + l\dot{\varphi}_1^2\left[-\operatorname{sen}\varphi_2\,\boldsymbol{i}_1 + (1+\cos\varphi_2)\boldsymbol{j}_1\right]\\
\boldsymbol{a}_{\text{cor}} &= 2l\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(-\operatorname{sen}\varphi_2\,\boldsymbol{i}_1 + \cos\varphi_2\,\boldsymbol{j}_1)
\end{aligned}$$

Los valores pedidos se obtienen como suma de las componentes anteriores,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{P/S_0} &= \boldsymbol{v}_{\text{arr}} + \boldsymbol{v}_{\text{rel}}\\
\boldsymbol{a}_{P/S_0} &= \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}} + \boldsymbol{a}_{\text{rel}}
\end{aligned}$$

Definir el concepto de fuerza generalizada en el contexto de la dinámica anlítica. *Expresar* las ecuaciones de Lagrange para un caso general en que existan fuerzas que provengan de un potencial y otras que no. *Aplicar* al caso particular de la figura, *expresando* las fuerzas generalizadas (Q_{φ_1}, Q_{φ_2}) que corresponden a las cargas aplicadas $F(t)$. *Interpretar razonadamente* el significado físico de Q_{φ_1}. (5 puntos.)



Supongamos un sistema $\{(m_i, \boldsymbol{r}_i), i = 1, \dots N\}$, sometido a fuerzas $\{\boldsymbol{F}_i, i = 1 \dots N\}$, cuya configuración se pueda definir por coordenadas generalizadas libres $\{q_j, j = 1 \dots n\}$. Los desplazamientos virtuales compatibles están relacionados por $\delta \boldsymbol{r}_i = (\partial \boldsymbol{r}_i / \partial q_j) \delta q_j$. Las fuerzas generalizadas se pueden definir como los coeficientes de los desplazamientos virtuales generalizados (δq_j) en la expresión del trabajo virtual,

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}}_{Q_j} \delta q_j$$

En un caso en que existan fuerzas que no provengan de un potencial, las fuerzas generalizadas se pueden descomponer como

$$Q_j = Q_j^C + Q_j^{NC} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}$$

y las ecuaciones de lagrange, en función de la Lagrangiana (parcial) $L = T - V$ resultan:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{NC}, \quad j = 1 \dots n$$

Para el caso de la figura, el trabajo virtual es

$$\delta W = F(t)\boldsymbol{i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_{O_1} + F(t)\boldsymbol{i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_P$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{r}_{O_1} &= l\delta\varphi_1(\cos\varphi_1\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi_1\,\boldsymbol{j}), \\
\delta \boldsymbol{r}_P &= \delta \boldsymbol{r}_{O_1} + \delta \boldsymbol{r}_{P/O_1} \\
&= l\delta\varphi_1(\cos\varphi_1\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi_1\,\boldsymbol{j}) + l(\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2)\left[(\cos(\varphi_1+\varphi_2)\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2)\boldsymbol{j}\right],
\end{aligned}$$

realizando los productos escalares y agrupando los coeficientes de $(\delta\varphi_1, \delta\varphi_2)$ resulta:

$$\begin{aligned}
Q_{\varphi_1} &= F(t)\left[2l\cos\varphi_1 + l\cos(\varphi_1+\varphi_2)\right] \\
Q_{\varphi_2} &= F(t)l\cos(\varphi_1+\varphi_2)
\end{aligned}$$

Se puede comprobar fácilmente que Q_{φ_1} es el momento de las fuerzas $F(t)$ respecto a O_0, y Q_{φ_2} el momento de las fuerzas $F(t)$ respecto a O_1.