Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

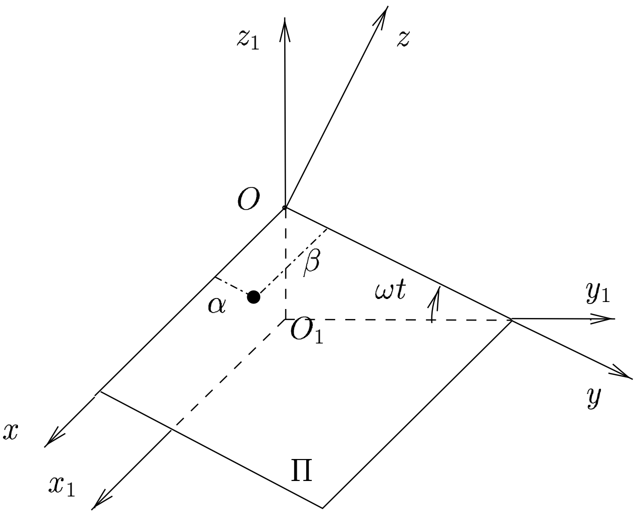
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (13 de septiembre de 1999)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º Tiempo: 50 min.

Un plano liso Π se mueve respecto a un triedro fijo $O_1x_1y_1z_1$ con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ de tal forma que dos rectas paralelas del mismo que están separadas por una distancia a deslizan respectivamente por los planos $O_1x_1y_1$, $O_1x_1z_1$ como se indica en la figura.
Sobre el plano Π se mueve sin rozamiento un punto pesado M de masa m, siendo α y β las distancias que los separan en un instante genérico de las rectas Ox, Oy. Se pide:



1. Plantear las ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Integrar completamente las ecuaciones anteriores suponiendo que en el instante inicial el punto M se encuentra en el origen de coordenadas con una velocidad relativa que forma un ángulo φ con la recta Ox.
3. Calcular la reacción entre el punto y el plano.

1.- Las dos únicas fuerzas exteriores que actúan sobre la partícula M son el peso $\boldsymbol{P}$ y la reacción $\boldsymbol{N}$ que ejerce el plano sobre la misma. La ecuación de la cantidad de movimiento se expresa, por tanto, a través de la siguiente ecuación vectorial:

$$\boldsymbol{N} + \boldsymbol{P} = m\boldsymbol{a}_M \tag{1}$$

Las componentes de la aceleración se pueden expresar a través del triedro móvil $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_{rel} + \boldsymbol{a}_{arr} + \boldsymbol{a}_{cor}$$

Sabiendo que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{rel} &= \ddot{\beta}\boldsymbol{i} + \ddot{\alpha}\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{a}_{arr} &= \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{OM} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{OM}) \\
\boldsymbol{a}_{cor} &= 2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_{rel}
\end{aligned}$$

Del enunciado se deduce que $\boldsymbol{\omega} = -\omega\,\boldsymbol{i}$ y $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{0}$. La aceleración $\boldsymbol{a}_O$ se puede calcular sabiendo que el movimiento del punto O tiene lugar a lo largo de la recta Oz_1, siendo la distancia $OO_1 = z_{1O} = a\,\mathrm{sen}\,\omega t$. De modo que $\boldsymbol{a}_O = \ddot{z}_{1O}\boldsymbol{k}_1 = -a\omega^2\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{k}_1$.

Los distintos vectores se expresan en el triedro móvil del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{arr} &= (a\omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t - \omega^2 \alpha)\boldsymbol{j} - a\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t\, \boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{a}_{cor} &= -2\omega\dot{\alpha}\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{N} &= N\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{P} &= mg(+\operatorname{sen} \omega t\, \boldsymbol{j} - \cos \omega t\, \boldsymbol{k})
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (1), resultan las tres ecuaciones diferenciales siguientes:

$$0 = m\ddot{\beta} \tag{2}$$

$$mg \operatorname{sen} \omega t = m(\ddot{\alpha} + a\omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t - \omega^2 \alpha) \tag{3}$$

$$N - mg \cos \omega t = m(-a\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t - 2\omega\dot{\alpha}) \tag{4}$$

2.- De las condiciones iniciales se deduce que $\dot{\beta}_0 = v_0 \cos \varphi$, $\dot{\alpha}_0 = v_0 \operatorname{sen} \varphi$ y $\beta_0 = \alpha_0 = 0$. De modo que la integración de la ecuación (2) resulta:

$$\beta = v_0 t \cos \varphi$$

La solución general de la ecuación (3) se puede descomponer en la suma de la solución general de la ecuación homogénea y una solución particular:

$$\begin{aligned}
\alpha_h &= Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \\
\alpha_p &= -\frac{g}{2\omega^2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{a}{10} \cos 2\omega t + \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

Las constantes A y B se obtienen a partir de las condiciones iniciales, resultando:

$$\alpha = -\frac{2a}{5} \cosh \omega t + \left(\frac{g}{2\omega^2} + \frac{v_0 \operatorname{sen} \varphi}{\omega}\right) \operatorname{senh} \omega t - \frac{g}{2\omega^2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{a}{10} \cos 2\omega t + \frac{a}{2}$$

3.- El valor de la reacción N se deduce directamente de la ecuación (4) sin más que sustituir el valor de $\dot{\alpha}$:

$$N = 3mg \cos \omega t - \frac{7ma\omega^2}{10} \operatorname{sen} 2\omega t + \frac{4ma\omega^2}{5} \operatorname{senh} \omega t - (mg + 2m\omega v_0 \operatorname{sen} \varphi) \cosh \omega t$$