Mecánica

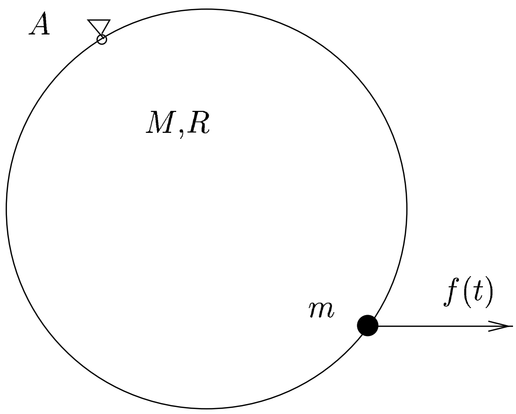
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (13 de septiembre de 1999)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

El sistema de la figura está formado por un aro circular de masa M y radio R que puede oscilar en un plano vertical fijo en torno a un punto fijo del mismo A. Sobre su perímetro puede deslizar libremente una partícula de masa m. El conjunto se halla sometido a la gravedad, y además sobre la partícula se ejerce una fuerza horizontal externa de valor $f(t)$ dado. Eligiendo las coordenadas generalizadas que parezcan oportunas, obtener las fuerzas generalizadas que habrían de incluirse en las ecuaciones de Lagrange, correspondientes a lafuerza $f(t)$. (5 puntos)



En un caso general las fuerzas generalizadas en un sistema se pueden descomponer en conservativas y no conservativas, de forma que las ecuaciones de Lagrange resultan:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{\mathrm{NC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{\mathrm{NC}}.$$

Las fuerzas generalizadas pueden obtenerse como los coeficientes de la expresión del trabajo virtual,

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n_F} \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{NC}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j^{\mathrm{NC}} \delta q_j \tag{1}$$

Tomando como coordenadas (θ, φ), donde θ es el ángulo girado por el aro y φ el que forma el radio correspondiente a la posición de m con la vertical, el desplazamiento virtual de m en dirección horizontal es $\delta x = R\cos\theta\,\delta\theta + R\cos\varphi\,\delta\varphi$, de donde la expresión (1) resulta

$$\delta W = f(t)[R\cos\theta\,\delta\theta + R\cos\varphi\,\delta\varphi] = Q_\theta \delta\theta + Q_\varphi \delta\varphi,$$

e identificando términos,

$$Q_\theta = f(t)R\cos\theta; \quad Q_\varphi = f(t)R\cos\varphi.$$

Se desea definir el campo de velocidades instantáneo de un sólido rígido mediante los vectores velocidad de tres puntos dados del mismo no alineados ($\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$). ¿Pueden ser estas velocidades arbitrarias, o por el contrario están necesariamente ligadas por condiciones de compatibilidad? En este último caso, expresar dichas condiciones. Supuestas conocidas ($\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$), deducir en función de ellas la dirección del vector velocidad de rotación instantánea. (5 puntos)

El campo de velocidades de un sólido rígido queda determinado por la velocidad de un punto y la velocidad angular $(\boldsymbol{v}_O, \boldsymbol{\Omega})$, es decir por 6 parámetros escalares. Los vectores velocidad ($\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$) constituyen un total de 9 parámetros, por lo que necesariamente estarán ligados por 3 condiciones de compatibilidad. Estas pueden expresarse como las condiciones de equiproyectividad:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{AB}, \\ \boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{BC}, \\ \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{CA}. \end{cases} \tag{2}$$

Teniendo en cuenta la relación entre las velocidades de dos puntos,

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AB}, \tag{3}$$

se deduce que su diferencia $(\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B)$ es siempre perpendicular a $\boldsymbol{\Omega}$. Teniendo en cuenta una relación similar con las velocidades de C y B, la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ puede expresarse como

$$\boldsymbol{n} = \frac{(\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B) \wedge (\boldsymbol{v}_C - \boldsymbol{v}_B)}{|(\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B) \wedge (\boldsymbol{v}_C - \boldsymbol{v}_B)|}, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \Omega\, \boldsymbol{n}. \tag{4}$$

Desde un punto de vista gráfico podría describirse como la normal al triángulo formado por los tres puntos ficticios definidos por los vectores velocidad ($\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$).