Mecánica

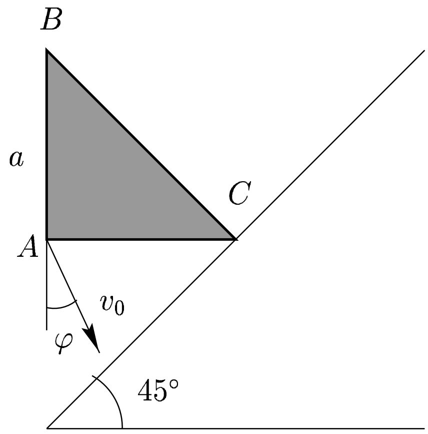
2.º EXAMEN PARCIAL (14 de Junio de 1999)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 3.º Tiempo: 60 min.

Un triángulo rectángulo isósceles ABC de masa m y catetos de longitud a, impacta en su vértice C con una pared lisa que está inclinada 45°. En el instante del choque el triángulo tiene un movimiento de traslación con velocidad v_0, que forma un ángulo φ con la vertical descendente. Asimismo, uno de los catetos está en posición vertical. El coeficiente de restitución es $e = 0$.
Se pide:

1. Campo de velocidades de la placa en el instante posterior al choque
2. Valor del ángulo φ para que la velocidad angular de la placa después del choque sea máxima



1.- Planteamos las ecuaciones de balance (cantidad de movimiento y momento cinético en G), empleando las coordenadas rectangulares x (horizontal hacia la dcha.) e y (vertical hacia arriba). Sean v_{Gx} y v_{Gy} las componentes de la velocidad de G en el instante posterior a la impulsión, y ω la velocidad angular de la placa en dicho instante.

Como la pared es lisa, la impulsión (I) es normal a la misma, resultando:

$$mv_0 \operatorname{sen}\varphi - I\frac{\sqrt{2}}{2} = mv_{Gx} \tag{1}$$

$$-mv_0 \cos\varphi + I\frac{\sqrt{2}}{2} = mv_{Gy} \tag{2}$$

$$Ia\frac{\sqrt{2}}{6} = I_G\omega, \tag{3}$$

siendo $I_G = (1/9)ma^2$ el momento de inercia del triángulo respecto de G.

Por otra parte, como $e = 0$, la velocidad despúes de la impulsión del punto de contacto C, en la dirección normal a la pared, es nula. Esto equivale a decir que la velocidad de C debe ser tangente a la pared:

$$v_{Cx} = v_{Cy} \tag{4}$$

Teniendo en cuenta la cinemática del sólido,

$$v_{Cx} = v_{Gx} + \frac{\omega a}{3}; \quad v_{Cy} = v_{Gy} + \frac{2\omega a}{3}. \tag{5}$$

Sustituyendo estos valores en (4), junto con las ecuaciones (1), (2), (3) se puede resolver para las incógnitas (ω, I, v_{Gx}, v_{Gy}). El resultado es:

$$\omega = \frac{v_0}{a}(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi) \tag{6}$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{3} m v_0 (\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi) \tag{7}$$

$$v_{Gx} = \frac{v_0}{3}(2\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi) \tag{8}$$

$$v_{Gy} = \frac{v_0}{3}(\operatorname{sen}\varphi - 2\cos\varphi) \tag{9}$$

2.- Derivando (6) respecto de φ e igualando a cero:

$$\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi = 0 \tag{10}$$

de donde $\varphi = 45°$ (la solución $\varphi = 225°$ no es válida pues la placa en vez de chocar se alejaría de la pared). Por otra parte, es inmediato comprobar que este valor es un máximo de ω:

$$\left.\frac{d^2\omega}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\pi/4} = \frac{v_0}{a}(-\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi)\Big|_{\varphi=\pi/4} = -\frac{v_0}{a}\sqrt{2} < 0 \tag{11}$$