Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

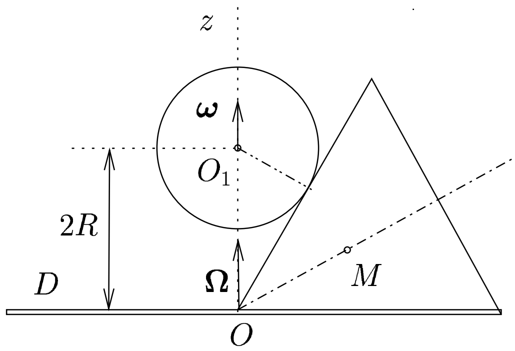
EXAMEN FINAL ORDINARIO (14 de Junio de 1999)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º Tiempo: 60 min.

Se considera un sistema material formado for los siguientes sólidos:

- Una esfera de radio R y centro O_1 que gira con una velocidad $\boldsymbol{\omega}$ constante alrededor de Oz.
- Un disco D de eje Oz que gira alrededor del mismo con velocidad $\boldsymbol{\Omega}$ constante.
- Un cono recto circular de vértice O que rueda sin deslizar por el exterior de la esfera y por la cara superior del disco y cuya sección meridiana se representa en la figura.



Se pide:

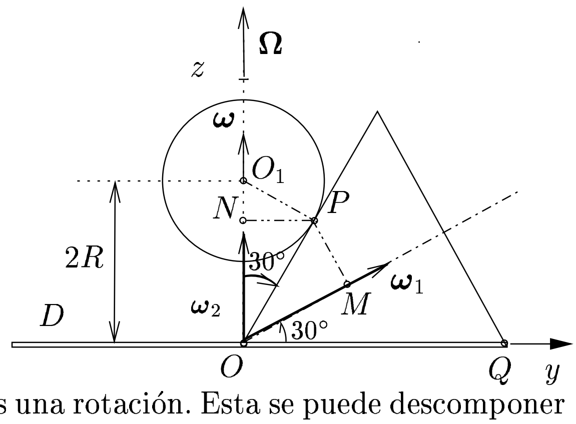
1. Velocidad y aceleración angular absoluta del cono.
2. Velocidad angular absoluta del eje OM del cono.
3. Aceleración del punto del cono en contacto con la esfera.
4. Determinar el eje del movimiento helicoidal tangente del cono y su velocidad mínima.

1.- Mediante sencillos razonamientos geométricos se deduce que el ángulo $\widehat{POO_1} = 30°$, por lo que el semiángulo del cono es también de 30°.

La condición de rodadura sin deslizamiento entre el cono y el disco D obliga a que el punto O tenga velocidad nula.

Se define un sistema móvil $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ de manera que $\boldsymbol{j}$ coincide con la generatriz de contacto con el disco y $\boldsymbol{k}$ con el eje vertical. La velocidad del punto P de la esfera en contacto con el cono es:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{P}$$
$$= -\omega R \cos 30° \, \boldsymbol{i} = -\frac{R\sqrt{3}}{2}\omega \, \boldsymbol{i}$$



Al tener un punto fijo, el movimiento del cono es una rotación. Esta se puede descomponer en una rotación $\boldsymbol{\omega}_2$ del plano meridiano Oyz alrededor de Oz y en una rotación en torno al eje del cono $\boldsymbol{\omega}_1$. Para el cálculo de estas dos componentes basta con imponer que las velocidades de los puntos del cono en contacto con la esfera (P) y en contacto con el disco (Q)

coincidan con las velocidades de los puntos correspondientes, pertenecientes respectivamente a la esfera y al disco. Esta igualdad se expresa a través de las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_P &= (\omega_1\,\overline{MP} - \omega_2\,\overline{NP})\,\boldsymbol{i} = -\frac{R\sqrt{3}}{2}\omega\,\boldsymbol{i};\\ \boldsymbol{v}_Q &= (-\omega_1\,\overline{OQ}\ \mathrm{sen}\,30 - \omega_2\,\overline{OQ})\,\boldsymbol{i} = -\Omega\,\overline{OQ}\,\boldsymbol{i}.\end{aligned}$$

Sabiendo que $\overline{MP} = \overline{NP} = \overline{O_1P}\ \cos 30^\circ = R\sqrt{3}/2$ se obtiene:

$$\omega_1 = \frac{2}{3}(\Omega - \omega); \qquad \omega_2 = \frac{2\Omega + \omega}{3}.$$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{\Omega}_c = \omega_1(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}) + \omega_2\,\boldsymbol{k} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\Omega - \omega)\,\boldsymbol{j} + \Omega\,\boldsymbol{k}$$

La aceleración angular del cono se deduce considerando que las componentes de $\boldsymbol{\Omega}_c$ en el triedro móvil $Oxyz$ son constantes, mientras que el propio triedro gira alrededor de Oz con velocidad ω_2, por lo que:

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}_c}{dt} = \omega_2\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Omega}_c = -\frac{\sqrt{3}}{9}(\Omega - \omega)(2\Omega + \omega)\,\boldsymbol{i}$$

2.- La velocidad angular absoluta del eje del cono, $\boldsymbol{\Omega}_e$, es precisamente $\boldsymbol{\omega}_2$:

$$\boldsymbol{\Omega}_e = \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{2\Omega + \omega}{3}\boldsymbol{k}$$

3.- La aceleración del punto P se calcula como:

$$\boldsymbol{a}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_c \wedge \boldsymbol{OP} + \boldsymbol{\Omega}_c \wedge (\boldsymbol{\Omega}_c, \wedge \boldsymbol{OP})$$

resultando:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}}_c \wedge \boldsymbol{OP} &= \frac{R}{6}(\Omega - \omega)(2\Omega + \omega)(\sqrt{3}\,\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k});\\ \boldsymbol{\Omega}_c \wedge (\boldsymbol{\Omega}_c \wedge \boldsymbol{OP}) = \boldsymbol{\Omega}_c \wedge \boldsymbol{v}_P &= -\frac{R\sqrt{3}}{2}\omega\Omega\,\boldsymbol{j} + \frac{R}{2}\omega(\Omega - \omega)\,\boldsymbol{k};\end{aligned}$$

y finalmente:

$$\boldsymbol{a}_P = \frac{R\sqrt{3}}{6}(2\Omega^2 - 4\Omega\omega - \omega^2)\,\boldsymbol{j} - \frac{R}{3}(\omega - \Omega)^2\,\boldsymbol{k}.$$

4.- El eje del movimiento helicoidal tangente es una recta que pasa por O y cuya dirección es la correspondiente a la velocidad angular del cono $\boldsymbol{\Omega}_c$. El ángulo φ que forma con el eje Oz es por tanto:

$$\tan\varphi = \frac{\Omega_y}{\Omega_z} = \frac{\Omega - \omega}{\sqrt{3}\Omega}$$

El movimiento es una rotación, por lo que la velocidad mínima es nula.