Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

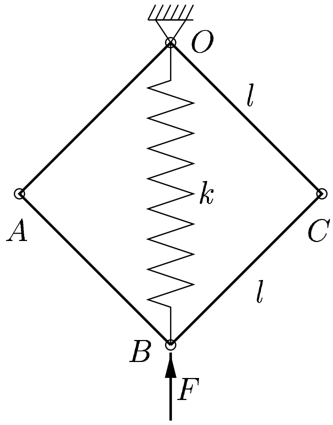
EXAMEN FINAL ORDINARIO (14 de junio de 1999)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Si se pide *obtener* o *deducir* un resultado, deberán justificarse razonadamente todos los pasos partiendo de las ecuaciones o hipótesis previas, mientras que si se pide *expresar* o *definir* deberá responderse con la necesaria precisión, sin que sea necesario demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no se recogerá.

Enunciar de forma general el principio de los trabajos virtuales para un sistema sometido a ligaduras lisas.
Aplicar al sistema plano de la figura adjunta, formado por un cuadrilátero articulado con barras pesadas iguales de masa m y longitud l cada una, colgado desde un punto fijo O, con un resorte lineal entre O y B de constante $k = \frac{mg}{l\sqrt{2}}$ y longitud natural nula, y el punto B obligado a moverse según la vertical, *determinando* la fuerza F necesaria para el equilibrio de forma que las barras formen un cuadrado. (5 puntos.)

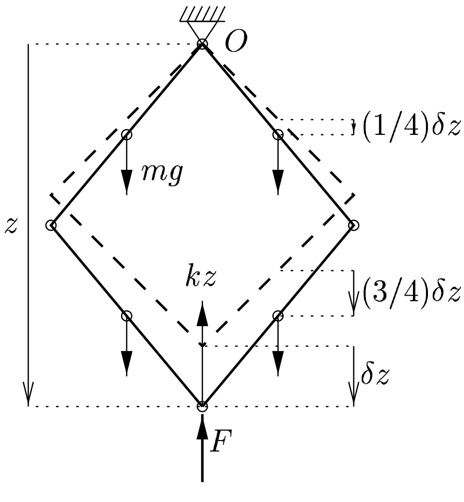


Se reproduce la respuesta de la página 6.23 de los apuntes de la asignatura:

"En un sistema material sometido a enlaces lisos, es una condición necesaria y suficiente para el equilibrio que el trabajo de las fuerzas aplicadas para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces sea nulo:

$$\boxed{\delta W = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0, \qquad \forall \{\delta \boldsymbol{r}_i\} \text{ comp.''}}$$

El sistema tiene un único grado de libertad, que puede caracterizarse por la coordenada z del extremo inferior (B). El desplazamiento virtual infinitesimal δz de este extremo equivale a desplazamientos $\delta z/4$ y $3\delta z/4$ de los centros de las barras superiores e inferiores respectivamente. Por tanto, la expresión del trabajo virtual resulta



$$\delta W = 2mg\frac{1}{4}\delta z + 2mg\frac{3}{4}\delta z - kz\delta z - F\delta z = 0 \quad \forall \delta z$$

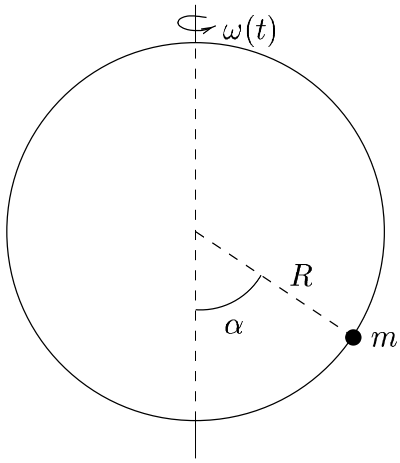
de donde se deduce

$$kz + F = 2mg.$$

Teniendo en cuenta el valor de $k = \frac{mg}{l\sqrt{2}}$ y que en la configuración de las barras como un cuadrado $z = l\sqrt{2}$, resulta

$$\boxed{F = mg.}$$

Expresar, para el caso general de una partícula ligada a una curva lisa y sometida a fuerzas aplicadas $\boldsymbol{F}$, las ecuaciones de la dinámica según las direcciones del triedro intrínseco.
Aplicar las expresiones anteriores, obteniendo las ecuaciones dinámicas de una partícula pesada de masa m ensartada con ligadura lisa en una circunferencia obligada a girar alrededor de un diámetro vertical con velocidad $\omega(t)$. En el caso particular $\omega =$ cte., *calcular* la posición de equilibrio relativo.
(5 puntos.)

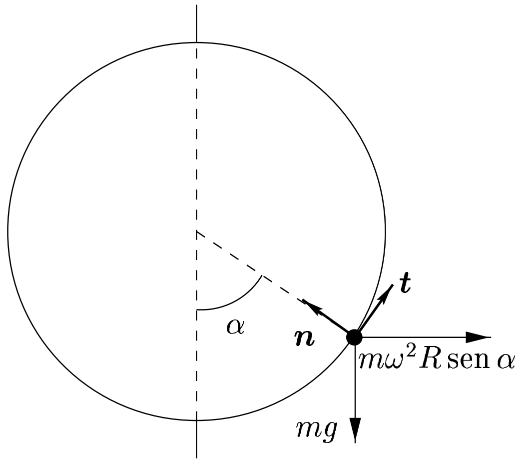


La ecuación vectorial es $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$, siendo $\boldsymbol{N}$ la reacción normal de la curva. Las componentes en el triedro intrínseco $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ son (ver apuntes de la asignatura, p. 2.23):

$$F_t = m\frac{dv}{dt}; \quad F_n + N_n = m\frac{v^2}{\rho}; \quad F_b + N_b = 0,$$

siendo ρ el radio de curvatura y v la velocidad.

En el ejemplo propuesto, los vectores $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{n}$ se muestran en la figura, siendo el vector $\boldsymbol{b}$ perpendicular al papel hacia fuera.
Plantearemos la dinámica relativa al sistema no inercial de la circunferencia que gira, debiendo en este caso añadir al peso (mg) la fuerza de inercia, que tiene las componentes de arrastre y de Coriolis:



$$\boldsymbol{F}_{\text{arr}} = m\omega^2 R \operatorname{sen}\alpha(\cos\alpha\,\boldsymbol{t} - \operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{n}) + m\dot{\omega}R\operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{F}_{\text{cor}} = 2m\omega v\cos\alpha\,\boldsymbol{b}$$

Las ecuaciones resultan

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -mg\operatorname{sen}\alpha + m\omega^2 R\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ m\frac{v^2}{R} &= -mg\cos\alpha - m\omega^2 R\operatorname{sen}^2\alpha + N_n \\ 0 &= m\dot{\omega}R\operatorname{sen}\alpha + 2m\omega v\cos\alpha + N_b \end{aligned} \tag{1}$$

El equilibrio relativo se produce para $\dot{\omega} = 0$ con $v = 0$, $\dot{v} = 0$, por lo que particularizando la primera de las ecuaciones anteriores $(1)_1$ resulta

$$m\operatorname{sen}\alpha(-g + \omega^2 R\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \frac{g}{\omega^2 R} & \text{(eq. estable siempre que exista, } g \le \omega^2 R\text{)} \\ \alpha_2 = 0 & \text{(eq. estable siempre que } g \ge \omega^2 R\text{)} \\ \alpha_3 = \pi & \text{(eq. inestable siempre)} \end{cases}$$

Sustituyendo para la solución no trivial α_1 en $(1)_2$ y $(1)_3$ se obtiene

$$N_n = m\omega^2 R$$
$$N_b = 0$$