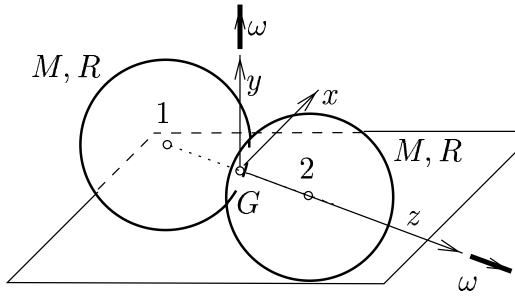
Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (14 de junio de 1999)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º Tiempo: 50 min.

Un sólido rígido está formado por dos esferas sólidas, de masa M y radio R cada una, tangentes entre sí y pegadas de forma completamente rígida en el punto de tangencia. Se pone en movimiento con las dos esferas apoyadas sobre un plano horizontal liso, con velocidad de rotación de componente ω según la dirección de la recta que une los centros y ω igualmente según la vertical. Se admite en principio que el sólido no bascula, manteniéndose ambas esferas apoyadas sobre el plano.



Se pide:

1. expresar el tensor central de inercia en ejes principales;
2. razonar si las componentes de la velocidad de rotación sobre el eje de los centros y el eje vertical deben mantenerse o no constantes;
3. obtener las ecuaciones de Euler de la dinámica;
4. calcular el valor de ω para el que el sólido bascularía, levantándose del plano por una de las esferas, señalando asimismo cuál de las dos sería.

1.- Se toma el triedro de referencia $(Gxyz)$ de la figura, con z según el eje de revolución, y vertical, y x horizontal. Téngase en cuenta que no es el triedro del sólido, ya que no gira con él alrededor de su eje de revolución, sino que el eje y se mantiene vertical en todo instante. El tensor de inercia es

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

siendo

$$A = 2\left(\frac{2}{5}MR^2 + MR^2\right) = \frac{14}{5}MR^2; \quad C = \frac{4}{5}MR^2.$$

2.- Sean $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ las componentes de la velocidad de rotación en un instante genérico según los ejes dados. Puesto que el sólido no bascula, $\omega_x = 0$. Por otra parte, las únicas fuerzas que producen momento en G son las reacciones verticales del plano sobre las esferas, cuyo momento en G lleva la dirección x. Puesto que la dirección y es fija, al no haber momento de las fuerzas según ella, el momento cinético según esta dirección es constante:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{M}_G \cdot \boldsymbol{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{j} = A\omega_y = \text{cte.}$$

Por lo que $\omega_y = \omega$ (cte.). El momento no tiene tampoco componente según la dirección z, pero en este caso debe considerarse que z es una dirección móvil, ya que el triedro gira con velocidad $\omega\,\boldsymbol{j}$:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k})}_{C\omega_z} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_G \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{H}_G \cdot \frac{d}{dt}\boldsymbol{k} = \underbrace{\boldsymbol{M}_G \cdot \boldsymbol{k}}_{=\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{H}_G \cdot (\omega\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k})$$
$$= (A\omega\boldsymbol{j} + C\omega_z\boldsymbol{k}) \cdot (\omega\boldsymbol{i}) = 0$$

por lo que resulta igualmente $\omega_z = \omega$ (cte.).

3.- La expresión del momento cinético es

$$\boldsymbol{H}_G = A\omega\,\boldsymbol{j} + C\omega\,\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

manteniendo constantes sus componentes en el triedro $Gxyz$, de forma que a lo largo del movimiento describe un cono de eje vertical con vértice en G.

Llamando N_1 y N_2 a las reacciones (normales) del plano sobre cada esfera, el momento es $\boldsymbol{M}_G = R(N_1 - N_2)\,\boldsymbol{i}$. Por otra parte, la derivada del momento cinético (1), teniendo en cuenta que sus componentes en los ejes considerados son constantes, es

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_G = \omega\,\boldsymbol{j} \wedge (A\omega\,\boldsymbol{j} + C\omega\,\boldsymbol{k}) = C\omega^2\boldsymbol{i}.$$

Las ecuaciones de Euler se reducen por tanto a una única ecuación escalar,

$$R(N_1 - N_2) = C\omega^2 \tag{2}$$

5.- Tenemos en cuenta además la ecuación de la cantidad de movimiento en dirección vertical,

$$N_1 + N_2 = 2Mg. \tag{3}$$

Entre las ecuaciones (2) y (3) se despejan las reacciones:

$$N_1 = Mg + \frac{2}{5}MR\omega^2; \quad N_2 = Mg - \frac{2}{5}MR\omega^2. \tag{4}$$

A medida que aumenta ω, llega un momento en que la reacción N_2 se anula, para el valor

$$\omega = \sqrt{\frac{5}{2}\frac{g}{R}},$$

en cuyo momento la esfera 2 se levantaría del plano.