Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (7 de Julio de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 2º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos, mientras que si se pide *expresar* no es necesaria la demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no deberá entregarse.

Sea un sólido rígido cuyo tensor de inercia respecto de un punto es $\boldsymbol{I}_O$. *Deducir* cúales son las direcciones que pasan por dicho punto respecto de las cuales los momentos de inercia son máximos o mínimos. (2.5 ptos.)

Para una dirección cualquiera definida por el versor unitario $\boldsymbol{e}$, el momento de inercia según el eje $(O, \boldsymbol{e})$ es $I_e = \boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{e})$, cumpliéndose $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} = 1$ (condición de ligadura). Se trata por tanto de un problema de máximos y mínimos condicionados. Igualando a cero la variación infinitesimal de I_e, se obtiene $2d\boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{e}) = 0$; tomando igualmente la variación infinitesimal de la condición de ligadura y multiplicando por un escalar arbitrario λ, llegamos a $2\lambda d\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e} = 0$. Restando las dos expresiones anteriores, se obtiene

$$d\boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{e} - \lambda \boldsymbol{e}) = 0,$$

lo que, al verificarse para una variación $d\boldsymbol{e}$ arbitraria, obliga a

$$\boxed{\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{e} = \lambda \boldsymbol{e}}$$

Es decir, los máximos y mínimos momentos de inercia corresponden a direcciones principales de inercia. De ser únicas las tres direcciones principales, una corresponderá al máximo momento de inercia, otra al mínimo, y la tercera a un valor intermedio.

Deducir las ecuaciones de equilibrio de un hilo flexible e inextensible en coordenadas intrínsecas.(2.5 ptos.)

Sea un hilo sometido a una carga distribuida $\boldsymbol{f}$ por unidad de longitud del mismo. La ecuación vectorial del equilibrio es $d\boldsymbol{T} + \boldsymbol{f} ds = \boldsymbol{0}$, donde $\boldsymbol{T}$ es la tensión del hilo que por la condición de flexibilidad perfecta será tangente al mismo, $\boldsymbol{T} = T\boldsymbol{t}$, siendo $\boldsymbol{t}$ la tangente en el triedro intrínseco de Frenet $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$. Esta ecuación se puede escribir de forma equivalente como

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}. \tag{1}$$

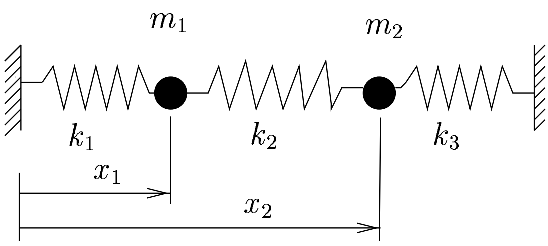
Desarrollando la derivada $(d\boldsymbol{T}/ds)$ teniendo en cuenta las fórmulas de Frenet,

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{dT}{ds}\boldsymbol{t} + T\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{dT}{ds}\boldsymbol{t} + T\frac{\boldsymbol{n}}{R},$$

siendo R el radio de curvatura. Llamando (f_t, f_n, f_b) a las componentes de $\boldsymbol{f}$ en el triedro intrínseco, La ecuación (1) equivale a

$$\boxed{\frac{dT}{ds} + f_t = 0; \quad \frac{T}{R} + f_n = 0; \quad f_b = 0.}$$

Del sistema de la figura se conocen las masas ($m_1 = m_2 = 1$), las frecuencias propias (ω_1 y ω_2, $\omega_1 \neq \omega_2$) así como los modos propios de vibración ($\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$). *Deducir* una ecuación que relacione las componentes de dichos modos entre sí, y *expresar* las ecuaciones que permitirían obtener las constantes elásticas k_1, k_2, k_3. (5 ptos.)



Tomando las coordenadas absolutas (x_1, x_2) de la figura, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}\left\|\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2\right\| \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

Análogamente, considerando el origen de las coordenadas en la posición natural de los resortes, la energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3x_2^2 = \frac{1}{2}\left\|x_1 \quad x_2\right\| \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Los dos modos de vibración están relacionados entre sí por la condición de ortogonalidad respecto de $\mathbf{M}$,

$$\left\|a_1 \quad a_2\right\| \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \tag{3}$$

Por otra parte, las ecuaciones que expresan la condición de valores propios son:

$$(\mathbf{K} - \omega_1^2\mathbf{M})\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{K} - \omega_2^2\mathbf{M})\boldsymbol{b} = \mathbf{0}.$$

Desarrolladas sus componentes, arrojan:

$$(k_1 + k_2)a_1 - \omega_1^2a_1 - k_2a_2 = 0 \tag{4}$$
$$-k_2a_1 + (k_2 + k_3)a_2 - \omega_1^2a_2 = 0 \tag{5}$$
$$(k_1 + k_2)b_1 - \omega_2^2b_1 - k_2b_2 = 0 \tag{6}$$
$$-k_2b_1 + (k_2 + k_3)b_2 - \omega_2^2b_2 = 0 \tag{7}$$

Las ecuaciones (4) y (6) permiten obtener k_1 y k_2; conocidas éstas, la ecuación (5) permitirá hallar k_3.