Mecánica

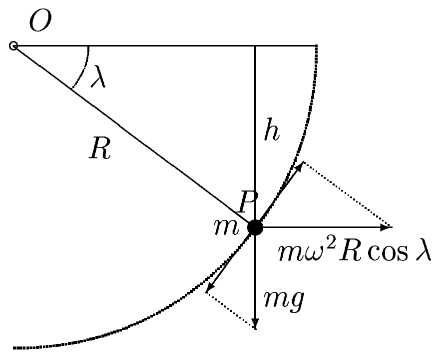
EXAMEN FINAL ORDINARIO (7 de Julio de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 1º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos, mientras que si se pide *expresar* no es necesaria la demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no deberá entregarse.

Una partícula pesada de masa m se mueve sobre la superficie de una esfera fija de radio R con ligadura bilateral lisa. Si la partícula se mueve sin variar su altura, *deducir* la relación que debe existir entre la velocidad y la altura, medida respecto al plano horizontal por el centro de la esfera. (5 ptos.)



Sea O el centro de la esfera y P la partícula, llamaremos λ al ángulo que forma el radio OP con la horizontal. La altura sobre dicho plano es $h = R\operatorname{sen}\lambda$. La partícula describe una circunferencia horizontal de radio $R\cos\lambda$, con velocidad angular $\omega = v/(R\cos\lambda)$.
La condición impuesta equivale a $\lambda =$ cte. por lo que impondremos la condición de equilibrio según esta coordenada. La proyección de la gravedad según la dirección meridional es $mg\cos\lambda$. La aceleración centrípeta proyectada es $\omega^2 R\cos\lambda\operatorname{sen}\lambda$. La ecuación de equilibrio resulta

$$m\frac{v^2}{R\cos\lambda}\operatorname{sen}\lambda = mg\cos\lambda.$$

Despejando v^2,

$$v^2 = \frac{gR\cos^2\lambda}{\operatorname{sen}\lambda},$$

y escribiendo la expresión en función de h, finalmente:

$$\boxed{v^2 = g\frac{R^2 - h^2}{h}}.$$

Se puede observar que la solución se obtiene exclusivamente para un valor positivo de h, que según el criterio de signos tomado, corresponde al hemisferio inferior.

Deducir la aceleración del punto material de un sólido en movimiento plano que en un instante dado se encuentra sobre el CIR. (2.5 ptos.)

Sea C el C.I.R. (punto geométrico) y C^* la partícula del sólido situada sobre él. Suponemos conocidos la velocidad de sucesión de C, $\boldsymbol{v}_C$, y la velocidad de rotación del sólido, $\boldsymbol{\Omega}$.

La velocidad de un punto cualquiera $\boldsymbol{r}_P$ del sólido, conocido el C.I.R. $\boldsymbol{r}_C$, es

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_C).$$

Derivando respecto del tiempo se obtiene la aceleración:

$$\boldsymbol{a}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge (\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_C) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{v}_P - \boldsymbol{v}_C)$$

Para el caso en que $P \equiv C^*$, se cumple $\boldsymbol{r}_{C^*} = \boldsymbol{r}_C$ por lo que

$$\boldsymbol{v}_{C^*} = \boldsymbol{0}; \qquad \boldsymbol{a}_{C^*} = -\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_C.$$

Expresar las posibles integrales primeras de un sistema dinámico y los requisitos necesarios para su existencia, en el marco de la dinámica analítica. (2.5 ptos.)

Sean $\{q_j,\ j = 1, \dots n\}$ coordenadas generalizadas libres, $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ la Lagrangiana, y Q_j otras fuerzas generalizadas no conservativas. Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, \dots n). \tag{1}$$

De estas ecuaciones se deduce directamente que si la Lagrangiana no depende de alguna coordenada q_j y $Q_j = 0$, el término entre paréntesis correspondiente (momento generalizado) es constante:

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \text{ y } Q_j = 0, \quad p_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{cte.}} \tag{2}$$

En el caso en que q_j sea una distancia o un ángulo, estas integrales primeras equivalen a la conservación de la cantidad de movimiento o del momento cinético respectivamente.

Por otra parte, suponiendo que todas las fuerzas provienen de un potencial, desarrollando la derivada total de $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ respecto del tiempo:

$$\frac{d}{dt}L = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

donde se han empleado las ecuaciones (1). Agrupando términos,

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right] = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

de donde se obtiene la expresión de la llamada *"integral de Jacobi"*:

$$\boxed{\text{si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad h \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = \text{cte}} \tag{3}$$

En el caso en que la energía cinética sea una expresión cuadrática homogénea en $\dot{q}_j$ (o lo que es lo mismo, si no hay enlaces móviles), h coincide con la energía total, $T + V$:

$$T = \sum_{j,k} \frac{1}{2} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \quad \Rightarrow \quad h = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = \underbrace{\sum_{j,k} a_{jk}\dot{q}_k\dot{q}_j}_{2T} - (T - V) = T + V$$