Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

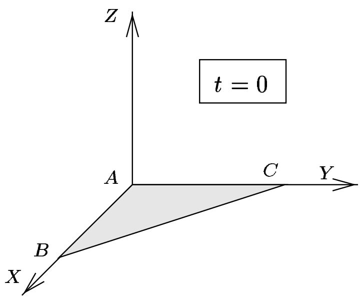
2º EXAMEN PARCIAL (8 de Junio de 1998)

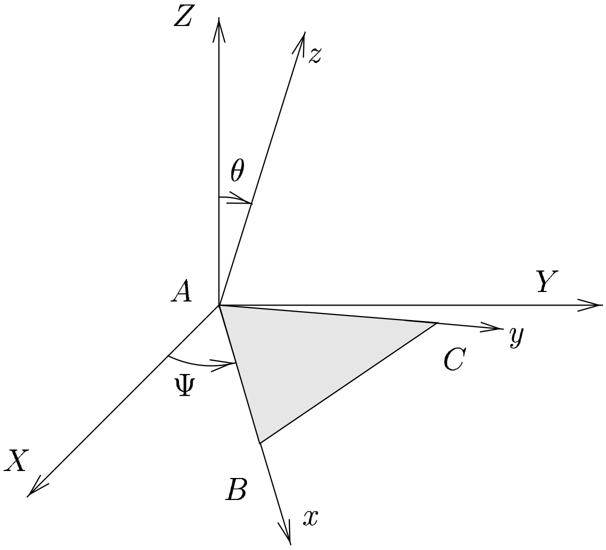
Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 4º Tiempo: 60 min.

Una placa homogénea con forma de triángulo rectángulo isósceles de lado a cae bajo la acción de la gravedad de forma que el vértice A permanece fijo con una rótula esférica y el vértice B desliza sobre el plano horizontal liso AXY. En el instante inicial, la placa está contenida en el plano AXY y la arista AB coincide con el eje X.

Se consideran dos sistemas de referencia: uno fijo (XYZ) y uno móvil ligado a la placa (xyz) de forma que en todo momento el eje x coincide con la arista AB, el eje y con la arista AC y el eje z es perpendicular al plano de la placa por A.





Se pide:

1. Expresar la velocidad angular absoluta Ω en una posición genérica mediante sus componentes en el triedro (xyz).

2. Obtener las integrales primeras del movimiento.

3. Expresar las ecuaciones de Euler de la dinámica, para lo que se considerará que la ligadura que obliga al lado AB a permanecer sobre el plano AXY es un apoyo puntual en B, originando la reacción correspondiente.

4. Obtener el valor de la reacción en B.

1.- La velocidad angular es la suma de dos componentes, por una parte $\dot{\psi}$ que al estar contenido el arco rotado en el plano horizontal AXY lleva la dirección Z, y por otra $\dot{\theta}$ que al estar contenido el arco en el plano vertical Ayz lleva la dirección x, aunque con sentido opuesto al dibujado en la figura como positivo para el eje x:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\,\boldsymbol{K} - \dot{\theta}\,\boldsymbol{i} \tag{1}$$

Considerando que, al estar contenido el eje vertical Z en el plano vertical Ayz, el versor correspondiente es $\boldsymbol{K} = -\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$, resulta

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\theta}\,\boldsymbol{i} - \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\cos\theta\,\boldsymbol{k} \tag{2}$$

2.- Todas las fuerzas aplicadas sobre la placa o bien provienen de enlaces lisos (reacciones en A y B) o bien son conservativas (peso), por lo que se conserva la energía total $(T+V)$.

Por otra parte, considerando que el movimiento se produce alrededor del punto A fijo, y que las fuerzas que dan momento en este punto (peso $(-mg\boldsymbol{K})$ y reacción del plano en B, $(R_B\boldsymbol{K})$) son paralelas al eje Z, la componente del momento cinético sobre este eje será también constante.

Para evaluar las expresiones que corresponden a estas dos integrales primeras debemos calcular el tensor de inercia en A, cuyas componentes en los ejes (xyz) son:

$$\boldsymbol{I}_A = ma^2 \begin{pmatrix} 1/6 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

El momento cinético se obtiene directamente de (2) y (3),

$$\boldsymbol{H}_A = \boldsymbol{I}_A \cdot \boldsymbol{\Omega} = ma^2 \left[\left(-\frac{\dot\theta}{6} + \frac{\dot\psi}{12}\operatorname{sen}\theta \right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\dot\theta}{12} - \frac{\dot\psi}{6}\operatorname{sen}\theta \right)\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}\dot\psi\cos\theta\,\boldsymbol{k} \right] \tag{4}$$

Proyectando sobre el eje $\boldsymbol{K}$ resulta

$$\boldsymbol{H}_A \cdot \boldsymbol{K} = ma^2 \left[-\frac{\dot\theta}{12}\operatorname{sen}\theta + \frac{\dot\psi}{6}(1+\cos^2\theta) \right] = 0, \tag{5}$$

donde se ha tenido en cuenta que la constante vale cero al partir la placa del reposo.

La expresión de la energía cinética, mediante (2) y (4) resulta

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{H}_A = \frac{ma^2}{2}\left[-\dot\theta\left(-\frac{\dot\theta}{6} + \frac{\dot\psi}{12}\operatorname{sen}\theta \right) - \dot\psi\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\dot\theta}{12} - \frac{\dot\psi}{6}\operatorname{sen}\theta \right) + \dot\psi\cos\theta\left(\frac{1}{3}\dot\psi\cos\theta \right) \right].$$

La energía potencial, tomando el cero en la posición inicial, es $V = -mg\frac{a}{3}\operatorname{sen}\theta$. Puesto que se parte del reposo, la integral primera es

$$T+V = \frac{ma^2}{2}\left[\frac{\dot\theta^2}{6} + \frac{\dot\psi^2}{6}(1+\cos^2\theta) - \frac{\dot\theta\dot\psi}{6}\operatorname{sen}\theta \right] - mg\frac{a}{3}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{6}$$

3.- La ecuación vectorial de Euler es

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{I}_A \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{H}_A \tag{7}$$

Evaluamos en primer lugar el momento de las fuerzas en A,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_A &= \boldsymbol{AG}\wedge(-mg\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{AB}\wedge R_B\boldsymbol{K} \\ &= -mg\frac{a}{3}\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \left(mg\frac{a}{3} - aR_B\right)\cos\theta\,\boldsymbol{j} + \left(mg\frac{a}{3} - aR_B\right)\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{8}$$

Empleando las expresiones (3), (2), (4) y (8) y operando en (7), resultan las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$-mg\frac{a}{3}\cos\theta = ma^2\left(-\frac{\ddot\theta}{6} + \frac{\ddot\psi}{12}\operatorname{sen}\theta - \frac{\dot\psi^2}{6}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \right) \tag{9}$$

$$\left(mg\frac{a}{3} - aR_B\right)\cos\theta = ma^2\left(\frac{\ddot\theta}{12} - \frac{\ddot\psi}{6}\operatorname{sen}\theta + \frac{\dot\psi^2}{12}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \right) \tag{10}$$

$$\left(mg\frac{a}{3} - aR_B\right)\operatorname{sen}\theta = ma^2\left(\frac{1}{3}\ddot\psi\cos\theta - \frac{1}{3}\dot\psi\dot\theta\operatorname{sen}\theta - \frac{\dot\theta^2}{12} + \frac{\dot\psi^2}{12}\operatorname{sen}^2\theta \right) \tag{11}$$

4.- De las ecuaciones anteriores se puede despejar R_B, multiplicando (10) por $\operatorname{sen}\theta$ y sumándole (11) multiplicada por $\cos\theta$. El resultado final es

$$\begin{aligned} R_B = {} & \frac{1}{3}mg - \frac{1}{12}ma\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{6}ma\ddot{\psi}(-\operatorname{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta) - \frac{1}{6}ma\dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta \\ & + \frac{1}{3}ma\dot{\psi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{1}{12}ma\dot{\theta}^2\cos\theta \end{aligned} \tag{12}$$