ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

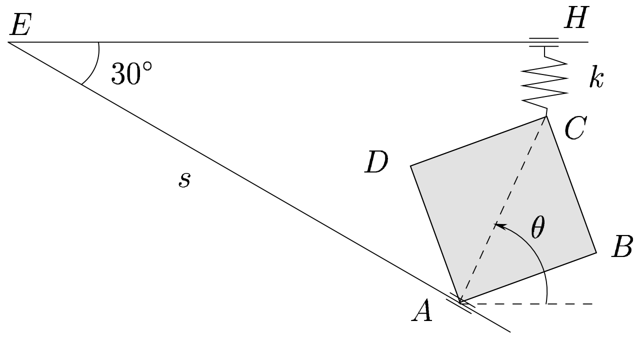
Mecánica

2º EXAMEN PARCIAL (8 de junio de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 3º (20 ptos.) Tiempo: 90 min.

Una placa cuadrada $ABCD$ de masa m y lado l está contenida en un plano vertical, de forma que el vértice A puede deslizar sobre una guía lisa inclinada 30°, y el vértice opuesto C está unido mediante un resorte a una deslizadera que a su vez se mueve libremente sobre una recta horizontal lisa. El resorte tiene longitud natural nula y constante elástica $k = (\sqrt{2}/3)mg/l$.



Se pide:

1. Obtener todas las posibles configuraciones de equilibrio;
2. Discutir la estabilidad de las mismas;
3. Calcular la reacción en A para dichas configuraciones;
4. Suponiendo ahora que el sistema está en movimiento, ecuaciones diferenciales de la dinámica;
5. Admitiendo además que el movimiento produce pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable (obtenida en la pregunta 2), linealizar las ecuaciones del movimiento (se recomienda tomar como coordenadas las relativas a dicha posición de equilibrio);
6. Frecuencias propias de las pequeñas oscilaciones;
7. Modos normales de vibración;
8. Expresión de las coordenadas normales en función de las coordenadas “geométricas”.
9. Integrar las ecuaciones en coordenadas normales para las condiciones iniciales $s(0) = s_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{s}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \omega_0$, siendo (s_0, θ_0) las coordenadas en la posición de equilibrio estable.

1.- Observamos que, al ser la guía H del resorte lisa, éste se colocará en posición vertical. Emplearemos unos ejes (x, z) con origen en el vértice E, siendo x horizontal y z vertical ascendente. En función de las coordenadas del centro G del cuadrado y del vértice C la energía potencial vale

$$V = mgz_G + \frac{1}{2}kz_C^2 \tag{1}$$

Considerando que

$$z_C = -\frac{s}{2} + l\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta; \quad z_G = -\frac{s}{2} + l\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2}$$

la expresión resulta

$$V(s,\theta) = mg\left(-\frac{s}{2} + l\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + \frac{1}{2}k\left(-\frac{s}{2} + l\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)^2 \tag{3}$$

Los puntos de equilibrio los hallamos obligando a que se anulen las derivadas,

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{mg}{2} - \frac{k}{2}\left(-\frac{s}{2} + l\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgl\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + k\left(-\frac{s}{2} + l\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) l\sqrt{2}\cos\theta = 0 \tag{5}$$

Comprobamos inmediatamente que (5) se anula para

$$\begin{cases} \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \pi/2,\ \theta_2 = -\pi/2; \\ mgl\frac{\sqrt{2}}{2} + k\left(-\frac{s}{2} + l\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) l\sqrt{2} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Sustituyendo las primeras dos condiciones en (4) se obtiene respectivamente $s_1 = 5\sqrt{2}l$ y $s_2 = \sqrt{2}l$. La otra condición equivale a $\left(-\frac{s}{2} + l\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}l$, que sustituido en (4) arroja un resultado absurdo, es decir no corresponde a una posición de equilibrio ya que no se anulará esta última derivada.

En resumidas cuentas, las dos posiciones de equilibrio posibles son

$$(s_1,\theta_1) = (5\sqrt{2}l, \pi/2); \quad (s_2,\theta_2) = (\sqrt{2}l, -\pi/2) \tag{7}$$

2.- Evaluamos las derivadas segundas de (3):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = k/4 \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial \theta} = -kl\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -mgl\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2kl^2(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) + k\frac{s}{2}l\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{10}$$

Particularizando estas derivadas para las posiciones de equilibrio (7), obtenemos las matrices de derivadas segundas (Hessiano):

$$\mathbf{H}|_{(s_1,\theta_1)} = \begin{pmatrix} k/4 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}kl^2 \end{pmatrix} > 0 \quad \underline{\text{estable}} \tag{11}$$

$$\mathbf{H}|_{(s_2,\theta_2)} = \begin{pmatrix} k/4 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}kl^2 \end{pmatrix} \not> 0 \quad \underline{\text{inestable}} \tag{12}$$

3.- Planteando el equilibrio de fuerzas sobre la placa,

$$-kz_C\,\boldsymbol{k} - mg\,\boldsymbol{k} + R_A\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k}\right), \tag{13}$$

Se deduce inmediatamente que en cualquier caso ha de ser $R_A = 0$, ya que la única componente horizontal de fuerzas corresponde a esta reacción.

Este resultado, aunque a primera vista pudiera parecer chocante, quiere decir que el equilibrio del peso de la placa se logra exclusivamente por la acción del resorte, suspendida a través del punto C, estando el centro G de la placa en la vertical del resorte. En las posiciones de equilibrio no habrá ninguna acción de la guía inclinada.

Pudiéramos haber razonado de esta guisa desde el principio, deduciendo que la elongación del resorte en el equilibrio ha de ser $z_C = mg/k = (3\sqrt{2}/2)l$. Así, si la placa se sitúa por debajo del punto de suspensión ($\theta_1 = \pi/2$) será $z_A|_1 = -(3\sqrt{2}/2)l - \sqrt{2}l = -(5\sqrt{2}/2)l$, mientras que si el punto A está por encima ($\theta_2 = -\pi/2$) será $z_A|_2 = -(3\sqrt{2}/2)l + \sqrt{2}l = -(\sqrt{2}/2)l$. En el primer caso, la distancia s al vértice E será $s_1 = -\left.z_A\right|_1/\operatorname{sen}(\pi/6) = 5\sqrt{2}l$, mientras que en el otro valdrá $s_2 = -\left.z_A\right|_2/\operatorname{sen}(\pi/6) = \sqrt{2}l$. Estos valores coinciden con los obtenidos antes (7).

4.- La energía cinética se evalúa mediante

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \tag{14}$$

El momento de inercia respecto a un eje perpendicular al plano del cuadrado por su centro es $I_G = \frac{1}{6}ml^2$. La velocidad al cuadrado se puede calcular teniendo en cuenta $x_G = s\frac{\sqrt{3}}{2} + l\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta$ y (2),

$$v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2 = \dot{s}^2 + \frac{l^2}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}l\dot{\theta}\dot{s}\operatorname{sen}\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}l\dot{\theta}\dot{s}\cos\theta.$$

Sustituyendo en (14) resulta

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{\sqrt{6}}{4}ml\dot{\theta}\dot{s}\operatorname{sen}\theta - \frac{\sqrt{2}}{4}ml\dot{\theta}\dot{s}\cos\theta. \tag{15}$$

Restando la energía potencial (3) se obtiene la Lagrangiana,

$$\begin{aligned} L =&\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{\sqrt{6}}{4}ml\dot{\theta}\dot{s}\operatorname{sen}\theta - \frac{\sqrt{2}}{4}ml\dot{\theta}\dot{s}\cos\theta \\ &- mg\left(-\frac{s}{2} + l\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta\right) - \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{mg}{l}\left(-\frac{s}{2} + l\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta\right)^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Las ecuaciones de Lagrange que resultan son

$$\begin{aligned} m\ddot{s} - \frac{\sqrt{6}}{4}ml\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta - \frac{\sqrt{6}}{4}ml\dot{\theta}^2\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{4}ml\ddot{\theta}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{4}ml\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta \\ - \frac{1}{2}mg - \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{mg}{l}\left(-\frac{s}{2} + l\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta\right) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}ml^2\ddot{\theta} - \frac{\sqrt{6}}{4}ml\ddot{s}\operatorname{sen}\theta - \frac{\sqrt{2}}{4}ml\ddot{s}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}mgl\cos\theta \\ + \frac{2}{3}mg\left(-\frac{s}{2} + l\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta\right)\cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

5.- La posición de equilibrio corresponde a $(s_0, \theta_0) = (5\sqrt{2}l,\ \pi/2)$. Trasladamos el origen de coordenadas a este punto mediante el cambio

$$\theta = \phi + \pi/2, \quad s = w + 5\sqrt{2}l \tag{19}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (17), (18) se obtiene

$$\begin{aligned} m\ddot{w} - \frac{\sqrt{6}}{4}ml\ddot{\phi}\cos\phi + \frac{\sqrt{6}}{4}ml\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\phi + \frac{\sqrt{2}}{4}ml\ddot{\phi}\operatorname{sen}\phi + \frac{\sqrt{2}}{4}ml\dot{\phi}^2\cos\phi \\ - \frac{1}{2}mg - \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{mg}{l}\left(-\frac{w}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}l + l\sqrt{2}\cos\phi\right) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}ml^2\ddot{\phi} - \frac{\sqrt{6}}{4}ml\ddot{w}\cos\phi + \frac{\sqrt{2}}{4}ml\ddot{s}\operatorname{sen}\phi - \frac{\sqrt{2}}{2}mgl\operatorname{sen}\phi \\ - \frac{2}{3}mg\left(-\frac{w}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}l + l\sqrt{2}\cos\phi\right)\operatorname{sen}\phi = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Considerando en estas ecuaciones valores pequeños de $(w, \phi, \dot{w}, \dot{\phi}, \ddot{w}, \ddot{\phi})$ y linealizando las ecuaciones resulta

$$m\ddot{w} - \frac{\sqrt{6}}{4}ml\ddot{\phi} + \frac{\sqrt{2}}{12}\frac{mg}{l}w = 0 \tag{22}$$

$$\frac{2}{3}ml^2\ddot{\phi} - \frac{\sqrt{6}}{4}ml\ddot{w} + \frac{\sqrt{2}}{2}mgl\phi = 0 \tag{23}$$

Estas ecuaciones quedan resumidas en la ecuación matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{24}$$

donde

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} w \\ \phi \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & -\frac{\sqrt{6}}{4}ml \\ -\frac{\sqrt{6}}{4}ml & \frac{2}{3}ml^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{12}\frac{mg}{l} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}mgl \end{pmatrix}. \tag{25}$$

El procedimiento seguido no es el único posible para obtener las matrices de coeficientes del sistema lineal, **K** y **M**. Una forma más directa de obtener éstas sería, a partir de las expresiones genéricas de V (3) y T (15), evaluar las matrices de derivadas segundas, $[\partial^2 V/\partial q_i \partial q_j]$ (ya obtenida antes, (8), (9), (10)) y $[\partial^2 T/\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j]$ respectivamente, y particularizar para la posición de equilibrio (s_1, θ_1). Puede comprobarse que se obtiene el mismo resultado (25).

6.- La matriz característica del problema de autovalores es

$$\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{12}\frac{mg}{l} - \lambda m & \lambda\frac{\sqrt{6}}{4}ml \\ \lambda\frac{\sqrt{6}}{4}ml & \frac{\sqrt{2}}{2}mgl - \lambda\frac{2}{3}ml^2 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

cuyo determinante igual a cero nos da la ecuación característica,

$$21\lambda^2 - 40\sqrt{2}\frac{g}{l}\lambda + 6\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0. \tag{27}$$

Las soluciones de esta ecuación son los autovalores (frecuencias propias al cuadrado):

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\dfrac{20\sqrt{2}+\sqrt{674}}{21}}\sqrt{\dfrac{g}{l}} = 1.6072\sqrt{\dfrac{g}{l}} \\ \\ \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\dfrac{20\sqrt{2}-\sqrt{674}}{21}}\sqrt{\dfrac{g}{l}} = 0.3326\sqrt{\dfrac{g}{l}} \end{cases} \tag{28}$$

7.- A partir de aquí emplearemos los datos numéricos $m = 1$, $l = 1$, $g = 9.8$. Sustituyendo cada uno de los autovalores λ_i de (28) en la matriz característica (26) obtenemos los vectores propios asociados como el núcleo de dicha matriz en cada caso:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{9}l(-16+\sqrt{337}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6416 \\ 1. \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{9}l(16+\sqrt{337}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.3509 \\ 1. \end{bmatrix}. \tag{29}$$

8.- La matriz modal $\mathbf{A}$, obtenida con los vectores propios por filas, permite expresar el cambio a coordenadas normales:

$$\begin{bmatrix} w \\ \phi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{9}l(-16+\sqrt{337}) & \frac{-\sqrt{6}}{9}l(16+\sqrt{337}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} .10007 & .93578 \\ -.10007 & .064212 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} w \\ \phi \end{bmatrix} \tag{31}$$

Cambiando a coordenadas normales mediante (30) en la ecuación (24) y premultiplicando por la matriz modal, resultan dos ecuaciones desacopladas:

$$0.2925\ddot{u}_1 + 7.4051u_1 = 0; \tag{32}$$

$$99.5593\ddot{u}_2 + 107.917u_2 = 0 \tag{33}$$

9.- Las condiciones iniciales para estas ecuaciones se obtienen a partir de los datos del problema aplicando (31):

$$\begin{bmatrix} u_1|_0 \\ u_2|_0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} \dot{u}_1|_0 \\ \dot{u}_2|_0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} = \omega_0 \begin{bmatrix} .93578 \\ .064212 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Con estos valores, la integración de las ecuaciones (32, 33) es inmediata,

$$u_1(t) = .18599\omega_0 \operatorname{sen}(5.0313t) \tag{35}$$

$$u_2(t) = .061675\omega_0 \operatorname{sen}(1.0411t) \tag{36}$$

Por último, mediante (30) deshacemos el cambio y se obtiene la trayectoria dinámica descrita mediante las coordenadas geométricas $(w(t), \phi(t))$:

$$w(t) = .11934\omega_0 \operatorname{sen}(5.0313t) - .57672\omega_0 \operatorname{sen}(1.0411t) \tag{37}$$

$$\phi(t) = .18599\omega_0 \operatorname{sen}(5.0313t) + .061675\omega_0 \operatorname{sen}(1.0411t) \tag{38}$$