ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

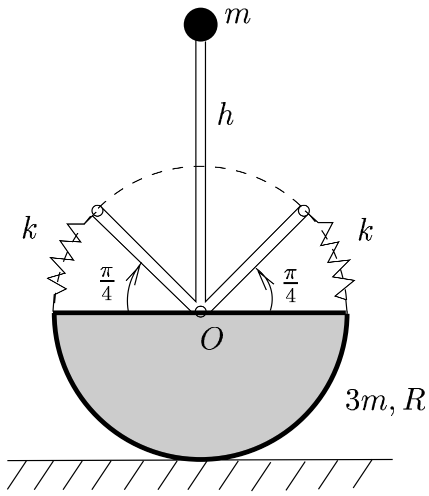
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (26 de Enero de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 5º Tiempo: 45 min.

Un semidisco de masa $3m$ y radio R puede rodar sin deslizar sobre un plano horizontal. En el punto O se articula un sólido formado por 3 brazos de peso despreciable. Los brazos extremos, de longitud R, están sometidos a la acción de unos resortes iguales de constante $k = \frac{mg}{R}$ y longitud natural $l_0 = \frac{\pi R}{4}$. Los resortes van colocados sobre una guía circular sin masa. Sobre el tercer brazo se coloca una masa m a distancia h de O.
Se pide calcular el máximo valor que puede adoptar h para que la posición vertical indicada en la figura sea de equilibrio estable.



Denominamos φ al ángulo girado por el semidisco, y θ al ángulo girado por el sólido de tres brazos respecto del semidisco. Tendremos en cuenta que el centro de masa del semidisco se halla a una distancia $4R/(3\pi)$ por debajo del centro del mismo. De esta forma, la energía potencial del sistema es

$$V(\varphi,\theta) = -3mg\left(\frac{4R}{3\pi}\right)\cos\varphi + mgh\cos(\theta+\varphi) + 2\frac{1}{2}k(R\theta)^2 \tag{1}$$

Las derivadas parciales resultan

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = mg\frac{4R}{\pi}\operatorname{sen}\varphi - mgh\operatorname{sen}(\theta+\varphi) \tag{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -mgh\operatorname{sen}(\theta+\varphi) + 2kR^2\theta \tag{3}$$

Se comprueba que la posición $(\varphi,\theta) = (0,0)$ es de equilibrio al resultar ambas nulas. Derivando de nuevo se obtiene la matriz de derivadas segundas o Hessiano, que particularizado en la posición de equlibrio es

$$\mathsf{H}|_{(0,0)} = mg\begin{pmatrix} \frac{4R}{\pi} - h & -h \\ -h & \frac{2kR^2}{mg} - h \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Las condiciones para que sea definido positivo son

$$\begin{cases} \frac{4R}{\pi} - h > 0; \\ \left(\frac{4R}{\pi} - h\right)\left(\frac{2kR^2}{mg} - h\right) - h^2 > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Desarrollando estas dos condiciones, se comprueba que la segunda es más restrictiva para h que la primera. Sustituyendo el valor de k del enunciado, resulta

$$h < \frac{4}{2+\pi}R. \tag{6}$$