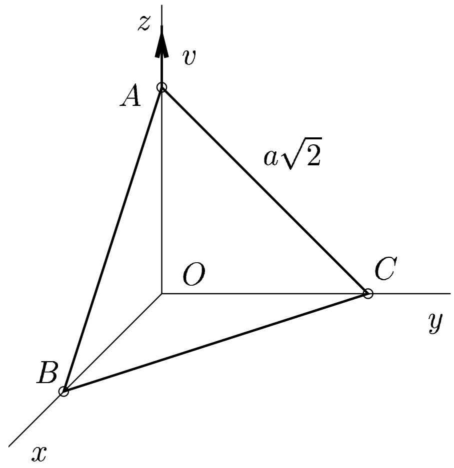
Mecánica

1[er] EXAMEN PARCIAL Y FINAL EXTRAORDINARIO (26 de Enero de 1998)

Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

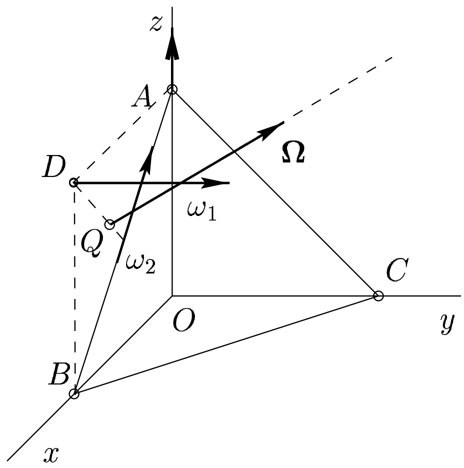
Ejercicio 3º Tiempo: 60 min.

Un triángulo equilátero rígido ABC evoluciona de forma que el vértice A se mueve sobre el eje Oz con velocidad v; B se mueve sobre Ox; y C está obligado a permanecer sobre el plano Oxy. En el instante en que C está sobre el eje Oy, se pide:



1. Velocidad del punto C;
2. Velocidad angular del sólido;
3. Punto en el que el eje del movimiento helicoidal tangente corta al plano Oxz y velocidad de deslizamiento de los puntos del mismo.

Teniendo en cuenta que el movimiento del lado AB es plano con centro instantáneo de rotación en D, podemos interpretar el movimiento como composición de dos rotaciones:



1. $\omega_1 \boldsymbol{j}$ por el punto D, que proporciona el movimiento plano de AB; el punto D se halla en la intersección de las perpendiculares a las velocidades de A y de B, es decir $\boldsymbol{OD} \equiv (a, 0, a)$.
2. ω_2 alrededor de BA, cuyo valor se calculará de forma que se cumpla la condición de que el punto C se mueva dentro del plano Oxy.

Su composición, al ser rotaciones aplicadas en ejes que no se cortan, dará lugar a un movimiento helicoidal general con velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ y deslizamiento en el eje.

1.- Analizando el movimiento de AB en el plano Oxz, con C.I.R. en D, se deduce que $v_B = v_A = v$ (en el instante que dice el enunciado) y $\omega_1 = v/a$. Por otra parte, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{BA} = (-a, 0, a)$, el vector velocidad de rotación alrededor de este lado es

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1).$$

En función de ω_1 y ω_2 la velocidad del punto C es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_C &= \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{DC} + \boldsymbol{\omega}_2 \wedge \boldsymbol{BC} \\ &= \omega_1 a(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) + \omega_2 \frac{a}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \end{aligned} \tag{1}$$

Imponiendo en esta última expresión que la componente z sea nula,

$$\omega_1 a - \omega_2 \frac{a}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \omega_1\sqrt{2} = \frac{v}{a}\sqrt{2}$$

Por tanto, sustituyendo los valores conocidos de ω_1 y ω_2 en (1) resulta

$$\boldsymbol{v}_C = -2v\boldsymbol{i} - v\boldsymbol{j} \tag{2}$$

2.- La velocidad angular es

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{v}{a}(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \tag{3}$$

3.- Un punto genérico P del eje del movimiento helicoidal, definido a partir de la velocidad de un punto conocido (en nuestro caso tomamos B), viene dado por

$$\boldsymbol{BP} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_B}{\Omega^2} + \lambda(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}); \tag{4}$$

teniendo en cuenta $\boldsymbol{v}_B = -v\boldsymbol{i}$ y (3), resulta

$$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OB} + \boldsymbol{BP} = a\boldsymbol{i} + \frac{a}{3}(-\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \lambda(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}). \tag{5}$$

Para hallar la intersección con Oxz imponemos en esta última expresión que la componente y sea nula,

$$-\frac{a}{3} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{a}{3}. \tag{6}$$

Sustituyendo de vuelta en (5) obtenemos el punto Q de corte buscado,

$$\boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{OQ} = \frac{2}{3}a\,(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) \tag{7}$$

La velocidad de deslizamiento (módulo) se puede calcular proyectando la velocidad de un punto cualquiera en dirección de $\boldsymbol{\Omega}$:

$$v_{\text{desl}} = \boldsymbol{v}_B \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = -v\boldsymbol{i} \cdot \left(-\frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\boldsymbol{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{v}{\sqrt{3}} \tag{8}$$

También podemos calcularla como vector, a través del campo de velocidades del sólido en el punto Q del eje:

$$\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{QA} = \frac{v}{3}(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \tag{9}$$