Mecánica

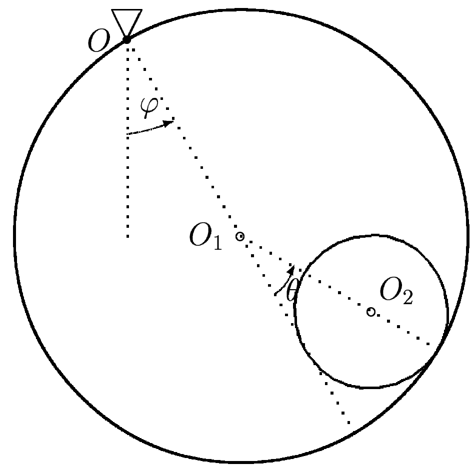
2º EXAMEN PARCIAL (9 de junio de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 5º Tiempo: 60 min.

Un aro de masa m y radio R puede oscilar en un plano vertical en torno a un punto O de su perímetro que está fijo. A su vez, otro aro de masa m y radio $r = R/3$ rueda sin deslizar dentro del primero.
Se pide

1. Ecuaciones del movimiento
2. Para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable:
   (a) ecuaciones del movimiento linealizadas
   (b) frecuencias propias
   (c) modos normales de vibración



1.- Tomamos como parámetros φ (ángulo de OO_1 con la vertical) y θ (ángulo de OO_2 con OO_1). Sea ω la velocidad de rotación (absoluta) del aro interior. La velocidad de rotación relativa de éste respecto al exterior será $\omega - \dot\varphi$; estableciendo la velocidad del punto O_2 como rodadura relativa al aro exterior,

$$\dot\theta(R-r) = -(\omega - \dot\varphi)r \quad \Rightarrow \quad \omega = \dot\varphi - \dot\theta\left(\frac{R}{r} - 1\right) = \dot\varphi - 2\dot\theta$$

La Lagrangiana es:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}(2mR^2)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mr^2[\dot\varphi - \dot\theta(R/r-1)]^2 \\ + \frac{1}{2}m\left[R^2\dot\varphi^2 + (R-r)^2(\dot\varphi+\dot\theta)^2 + 2R(R-r)\dot\varphi(\dot\varphi+\dot\theta)\cos\theta\right] \\ + mgR\cos\varphi + mg[R\cos\varphi + (R-r)\cos(\varphi+\theta)] \end{aligned} \quad (1)$$

particularizando para $R = 3r$, las ecuaciones de Lagrange resultantes son

$$\begin{aligned} 0 &= mr^2\ddot\varphi(32 + 12\cos\theta) - 12mr^2\dot\varphi\dot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + mr^2\ddot\theta(2+6\cos\theta) - 6mr^2\dot\theta^2\,\mathrm{sen}\,\theta \\ &\quad + 6mgr\,\mathrm{sen}\,\varphi + 2mgr\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta) \\ 0 &= 8mr^2\ddot\theta + mr^2\ddot\varphi(2+6\cos\theta) + 6mr^2\dot\varphi^2\,\mathrm{sen}\,\theta + 2mgr\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

2.- La posición de equilibrio estable corresponde a $\varphi = \theta = 0$; en las pequeñas oscilaciones supondremos pequeños $(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$, obteniéndose así las ecuaciones linealizadas:

$$\begin{aligned} 0 &= 44mr^2\ddot{\varphi} + 8mr^2\ddot{\theta} + 8mgr\varphi + 2mgr\theta \\ 0 &= 8mr^2\ddot{\varphi} + 8mr^2\ddot{\theta} + 2mgr\varphi + 2mgr\theta \end{aligned} \tag{3}$$

Si se considera una solución armónica del tipo $\{\mathbf{a}\} \operatorname{sen} \omega t$, siendo $\{\mathbf{a}\}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2)$, sustituyendo en las ecuaciones diferenciales (3), se llega a la ecuación matricial algebraica siguiente

$$mr^2 \begin{pmatrix} 8\frac{g}{r} - 44\omega^2 & 2\frac{g}{r} - 8\omega^2 \\ 2\frac{g}{r} - 8\omega^2 & 2\frac{g}{r} - 8\omega^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

Para que exista solución no trivial ($\{\mathbf{a}\} \neq \{\mathbf{0}\}$), la matriz de coeficientes debe ser singular, lo que queda expresado mediante la ecuación característica (determinante nulo), cuyas dos raíces positivas son las frecuencias propias:

$$(mr^2)^2 \left[288\omega^4 - 120\frac{g}{r}\omega^2 + 12\left(\frac{g}{r}\right)^2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\dfrac{g}{r}} \\ \omega_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{r}} \end{cases}$$

Sustituyendo estas dos frecuencias propias en la ecuación (4) se obtienen los vectores propios correspondientes (modos normales). Para $\omega_1 = \sqrt{g/6r}$,

$$mgr \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

De igual manera, para $\omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{g/r}$,

$$mgr \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

(se han normalizado los vectores propios con el criterio de que la primera componente no nula sea la unidad).

En función de la matriz modal $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pueden expresar las coordenadas normales (u_1, u_2):

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathsf{A}^{-\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \varphi \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi + \theta \end{Bmatrix} \tag{5}$$