Mecánica

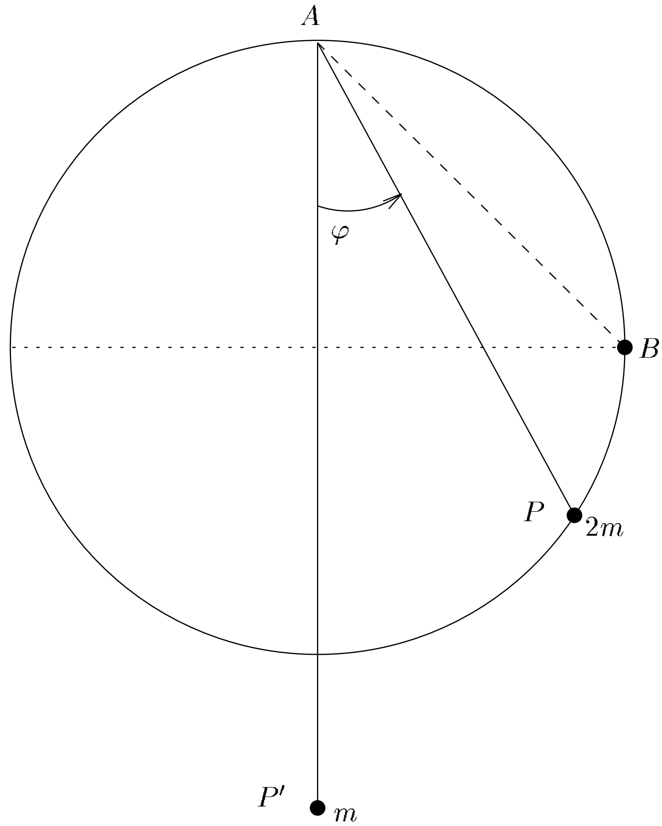
1$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (29 de enero de 1997)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 5º Tiempo: 45 min.

Una partícula P de masa $2m$ puede moverse sin rozamiento sobre una circunferencia vertical de radio R. A su vez P está atada a un hilo flexible inextensible y sin masa, que pasa por una pequeña polea sin rozamiento situada en el punto superior de la circunferencia (A), en cuyo extremo opuesto hay otra partícula de masa m obligada a moverse según la vertical de A. En el instante inicial la partícula P está en reposo en el punto B situado sobre un diámetro horizontal y se abandona a la acción de la gravedad. Se pide:

1. definir el movimiento dejándolo expresado mediante una integral primera (ecuación diferencial de 1$^{\text{er}}$ orden) en función de φ;
2. tensión en el hilo y reacción de la circunferencia sobre P para el instante en que está situada en el punto más bajo de la circunferencia ($\varphi = 0$).



1.- El sistema es conservativo, por lo que la ecuación de conservación de la energía proporciona la integral primera pedida. Obtendremos en primer lugar las velocidades para expresar la energía cinética. El ángulo que forma el radio por P con la vertical descendente es 2φ, por lo que su velocidad es $v_P = 2R\dot{\varphi}$, tangente a la circunferencia. La velocidad de P' es vertical y se puede calcular derivando la ordenada $\overline{AP'} = L - \overline{AP} = L - 2R\cos\varphi$ (llamamos L a la longitud del hilo):

$$v_{P'} = 2R\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi, \tag{1}$$

con el criterio de signo positivo para la velocidad descendente. La energía cinética es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(2m)(2R\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m(2R\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2 \\ &= mR^2\dot{\varphi}^2(4 + 2\,\mathrm{sen}^2\varphi) = mR^2\dot{\varphi}^2(5 - \cos 2\varphi) \end{aligned}$$

y la potencial

$$V = (2m)g(-R\cos 2\varphi) + mg(2R\cos\varphi)$$

La conservación de la energía, en función de las condiciones iniciales dadas, arroja

$$mR^2\dot{\varphi}^2(5-\cos 2\varphi)+2mgR(\cos\varphi-\cos 2\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2}}mgR \tag{2}$$

2.- Obtendremos en primer lugar, a partir de (2), los valores de $\dot{\varphi}$ y $\ddot{\varphi}$ en un instante genérico:

$$\dot{\varphi}^2=\frac{2g}{R}\frac{\cos 2\varphi-\cos\varphi+1/\sqrt{2}}{5-\cos 2\varphi}; \tag{3}$$

y derivando,

$$\ddot{\varphi}=\frac{g}{R}\frac{(-2\,\mathrm{sen}\,2\varphi+\mathrm{sen}\,\varphi)(5-\cos 2\varphi)-2\,\mathrm{sen}\,2\varphi(\cos 2\varphi-\cos\varphi+1/\sqrt{2})}{(5-2\cos 2\varphi)^2} \tag{4}$$

Teniendo en cuenta el criterio de signo establecido en (1) para $v_{P'}$, la tensión Q del hilo se expresa como

$$Q=mg+m\frac{d}{dt}v_{P'}=mg+2mR(\ddot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi) \tag{5}$$

Particularizando para la posición que se pide en (3) y (4):

$$\left.\dot{\varphi}^2\right|_{\varphi=0}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{g}{R};\qquad \left.\ddot{\varphi}\right|_{\varphi=0}=0$$

y sustituyendo en (5):

$$Q=mg\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{6}$$

La reacción N de la circunferencia sobre P se obtiene mediante la ecuación de la dinámica en dirección radial (signo positivo centrífugo):

$$N-Q\cos\varphi+2mg\cos 2\varphi=-(2m)R(2\dot{\varphi})^2 \tag{7}$$

Particularizando los valores de $\dot{\varphi}$ y de Q se obtiene finalmente

$$N=-mg\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+1\right) \tag{8}$$

(el signo negativo indica que la reacción es centrípeta).