UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID — E. T. S. I. CAMINOS, C. y P.

2º CURSO - MECÁNICA — 2º EXAMEN PARCIAL (10-6-96)

EJERCICIO 1º — TIEMPO: 1 hora

Primer apellido ____________________

Segundo apellido ____________________

Nombre ____________________ *Grupo* _____ *Nº* __________

Responder a las siguientes cuestiones *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

1ª) *Definir* la función hamiltoniana. Como aplicación, obtenerla en el caso siguiente: Cilindro homogéneo de masa m y radio r que gira y desliza según su propio eje, que permanece vertical. (2 puntos)

Se define la función hamiltoniana H como la transformada de Legendre de la Lagrangiana L, respecto de las velocidades generalizadas. Es decir: $H(q_i, p^i, t) = \sum_i p^i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Es importante subrayar que la dependencia funcional de la Hamiltoniana es respecto de las variables (q_i, p^i, t), para lo que se deben eliminar de la expresión de la misma las velocidades $\dot{q}_i$ en favor de los momentos p^i.

En el caso concreto que se pide, llamemos y al recorrido vertical y u al ángulo girado.

$T = 1/2\, m\, \acute{y}^2 + 1/2\; 1/2\, m\, r^2\, \acute{u}^2$ $\qquad V = mgy$ $\qquad L = 1/2\, m\, \acute{y}^2 + 1/4\, m\, r^2\, \acute{u}^2 - mgy$

$$\left.\begin{array}{l} p^y = \partial L/\partial \acute{y} = m\, \acute{y} \\ p^u = \partial L/\partial \acute{u} = 1/2\, m\, r^2\, \acute{u} \end{array}\right\} \text{ de donde: } \left\{\begin{array}{l} \acute{y} = p^y/m \\ \acute{u} = 2\, p^u/(m\, r^2) \end{array}\right. \text{ por lo que tendremos:}$$

$$H = (p^y)^2/m + 2\,(p^u)^2/(m\, r^2) - 1/2\, m\, (p^y/m)^2 - 1/4\, m\, r^2\, \{2\, p^u/(m\, r^2)\}^2 + mgy =$$
$$= 1/2\,(p^y)^2/m + (p^u)^2/(m\, r^2) + mgy$$

NOTA: Se recuerda que hay que expresar H en función de y de p^i, por lo que hay sustituir los valores de las $\dot{q}_i$.

2ª) ¿Qué se entiende por estructura articulada interiormente isostática? Como aplicación, indicar cuántos nudos deberá tener una estructura de estas características que está formada por nueve barras, en los dos casos siguientes:

a) La estructura es espacial.

b) La estructura es plana. (2 puntos)

Es la formada por barras articuladas entre sí de forma que no posea grados de libertad internos y que las ecuaciones de la estática basten para obtener las tensiones en todas las barras. Esto hace que entre el número b de barras y el número n de nudos deba verificarse:

Si la estructura es:	Número de incógnitas: de reacciones	Número de incógnitas: de tensiones	Número de ecuaciones	Relación necesaria
espacial	6	b	$3n$	$3n = 6 + b$
plana	3	b	$2n$	$2n = 3 + b$

En nuestro caso, con $b = 9$: si la estructura es espacial, $n = 5$; y si es plana, $n = 6$

3ª) *Discutir* si en un movimiento de Poinsot pueden presentarse alguna de las dos circunstancias siguientes:

a) La dirección del vector rotación se mantiene invariable.

b) El módulo de la velocidad de rotación se mantiene constante.

Razonar, en especial, si la presentación de alguna de ellas obliga a que se presente la otra. (3 puntos)

Sabemos que en un movimiento de Poinsot el vector rotación **Ω** describe como axoide fijo un cono cuádrico alrededor de la dirección invariable del momento cinético $\mathbf{H_0}$ (que vale $\boldsymbol{I_0}\ \mathbf{\Omega}$ y que es un vector que se mantiene constante)por lo que para que su dirección se mantenga invariable, ésta debe coincidir con la de $\mathbf{H_0}$, es decir, debe ir dirigida según un eje principal de inercia. En este caso, por la constancia de H_0, también se conservará el módulo Ω de la velocidad de rotación.

Como también sabemos, la proyección de **Ω** sobre $\mathbf{H_0}$ se mantiene constante, por lo que si el módulo Ω permanece constante debe formar un ángulo constante con $\mathbf{H_0}$, es decir, el cono fijo es de revolución, lo que ocurrirá cuando dos momentos principales de inercia sean iguales. En este caso, es evidente que la dirección de **Ω** no necesariamente se mantiene invariable.

4ª) Un hilo homogéneo de $2L$ metros de longitud y un peso específico de q N/m, cuelga de dos clavos situados a la misma altura. Si en los extremos del hilo su pendiente es de 45º, *deducir* cuál será el parámetro a de la catenaria y cuánto valdrá la tensión máxima $T_{máx}$ del hilo. (3 puntos)

Si la pendiente es de 45º, debe ser $Sh(x_1/a) = tg\ 45^o = 1$.

Como sabemos: $L = a\ Sh(x_1/a)$, por lo tanto tendremos que $\underline{\underline{a = L}}$

Por otra parte, también sabemos que la tensión máxima se presenta en los apoyos y vale:

$\underline{\underline{T_{máx}}} = q\ z_1 = q\ a\ Ch(x_1/a) = q\ a\ \{1 + Sh^2(x_1/a)\}^{1/2} = \underline{\underline{\sqrt{2}\ q\ L}}$