

Mecánica

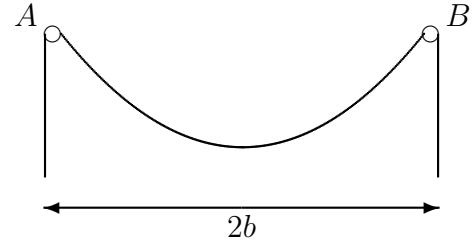
EXAMEN FINAL DE SEPTIEMBRE (14 de Septiembre de 1995)

Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

Ejercicio 6.º

Tiempo: 45 min.

Se desea colgar un hilo homogéneo, de peso específico q , haciéndolo pasar sobre dos clavos lisos A y B , fijos al mismo nivel y situados a una distancia $2b$. Se pide:



1. ¿Cuál es la longitud mínima necesaria del hilo?
2. Como en las condiciones anteriores la posición de equilibrio es inestable, se desea estabilizarla uniendo a los extremos del hilo sendos pesos P , de forma que la tensión horizontal del tramo de catenaria entre A y B sea el doble de la que tenía en la situación primera. ¿Cuál es el valor de P ?

NOTA: No es necesario comprobar ninguna de las referencias a estabilidad.

1.- Obtengamos en primer lugar la longitud total del hilo para una configuración dada, definida por el parámetro $a = T_0/q$ de la catenaria.

La longitud de cada uno de los trozos que cuelgan debe ser aquella cuyo peso equilibre la tensión de los extremos de la catenaria, es decir: $a \cosh(b/a)$, por lo que la longitud total del hilo será:

$$S = 2a \sinh \frac{b}{a} + 2a \cosh \frac{b}{a} = 2ae^{b/a}$$

El valor mínimo de la longitud lo obtendremos anulando la derivada dS/da :

$$\frac{dS}{da} = 0 \Rightarrow e^{b/a} - a \frac{b}{a^2} e^{b/a} = e^{b/a} \left(1 - \frac{b}{a} \right) = 0 \Rightarrow b = a$$

con lo que resulta que la longitud mínima pedida vale:

$$S_{\min} = 2be$$

2.- Al duplicarse la tensión horizontal T_0 el parámetro $a = T_0/q$ se duplica igualmente. Los pesos P son equivalentes a un aumento de la longitud del hilo en dos tramos de P/q cada uno, por lo que, dado que el nuevo parámetro de la catenaria vale $2b$, tenemos:

$$2be + 2P/q = 2(2b)e^{b/(2b)}$$

con lo que obtenemos:

$$P = qb(2\sqrt{e} - e)$$