Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL JUNIO (20 de Junio de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (sólo del 1.º Parcial) Tiempo: 45 min.

Un oscilador lineal está formado por una masa de 100 kg unida a un resorte elástico de constante 10 000 N/m. La oscilación, sin resistencias pasivas, debe realizarse según una recta horizontal. El sistema está montado sobre un dispositivo al que se le comunica un movimiento impuesto paralelo a la recta anterior de acuerdo con la ley $u = 0{,}20 \operatorname{sen} \omega t$ en metros. Se pide:

1. Obtener la frecuencia angular ω que produce la resonancia.
2. Ecuación del movimiento relativo de la masa respecto del dispositivo que la soporta, siendo las condiciones iniciales (en $t = 0$) el muelle sin tensión y la masa sin velocidad relativa. Para este punto se tomará $\omega = 8$ rad/s.
3. Suponiendo que existe un pequeño amortiguamiento inevitable, expresar el régimen permanente del movimiento relativo y el máximo esfuerzo que soporta el muelle en este régimen.
4. Discutir razonadamente si este máximo esfuerzo se puede ver superado durante el régimen transitorio.

1.- La ecuación diferencial del movimiento se obtiene igualando la aceleración absoluta multiplicada por la masa a la fuerza actuante sobre la masa, que será sólo la acción del muelle. Llamando x a la abcisa relativa,

$$100(\ddot{x} + \ddot{u}) = -10\,000\, x$$

es decir.

$$\ddot{x} + 100\, x = 0{,}2\, \omega^2 \operatorname{sen} \omega t \tag{1}$$

La frecuencia de resonancia es

$$\omega_r = \sqrt{100} = 10 \,\text{rad/s}$$

2.- Para $\omega = 8$ rad/s la ecuación (1) es

$$\ddot{x} + 100\, x = 12{,}8 \operatorname{sen} 8t \tag{2}$$

Cuya solución general es del tipo

$$x = \underbrace{A \operatorname{sen}(10t + \varphi)}_{x_h} + \underbrace{B \operatorname{sen}(8t + \delta)}_{x_p}$$

sustituyendo x_p en la ecuación diferencial (2) se obtiene

$$\delta = 0; \quad B = \frac{12{,}8}{36} = 0{,}355556\,\mathrm{m}$$

y con las condiciones iniciales dadas ($x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$) se obtiene

$$\varphi = 0; \quad A = -\frac{8}{10}B = -0{,}284444\,\mathrm{m}$$

por lo que la solución es

$$x = -0{,}284444\,\mathrm{sen}\,10t + 0{,}355556\,\mathrm{sen}\,8t \tag{3}$$

3.- Si existe un amortiguamiento pequeño, al cabo del tiempo queda sólo el segundo sumando de (3), que proviene de la solución particular. El esfuerzo máximo del muelle es la amplitud de esta oscilación multiplicada por la constante del resorte,

$$F_{max} = 0{,}355556 \cdot 10^4 = 3555{,}56\,\mathrm{N}$$

4.- En el régimen transitorio el esfuerzo en el muelle será el producto de la constante del resorte por la elongación x de (3). Esta es la suma de dos armónicos, que en los puntos en que coincidan los máximos podrá tener una elongación mayor que el de los armónicos componentes, y por tanto mayor que el régimen permanente.

De forma más precisa podemos derivar para obtener el máximo de (3), resultando

$$-\cos 10t + \cos 8t = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\mathrm{sen}(9t)\,\mathrm{sen}(t) = 0$$

Esta condición se cumple para

$$\begin{aligned} t &= n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ 9t &= m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

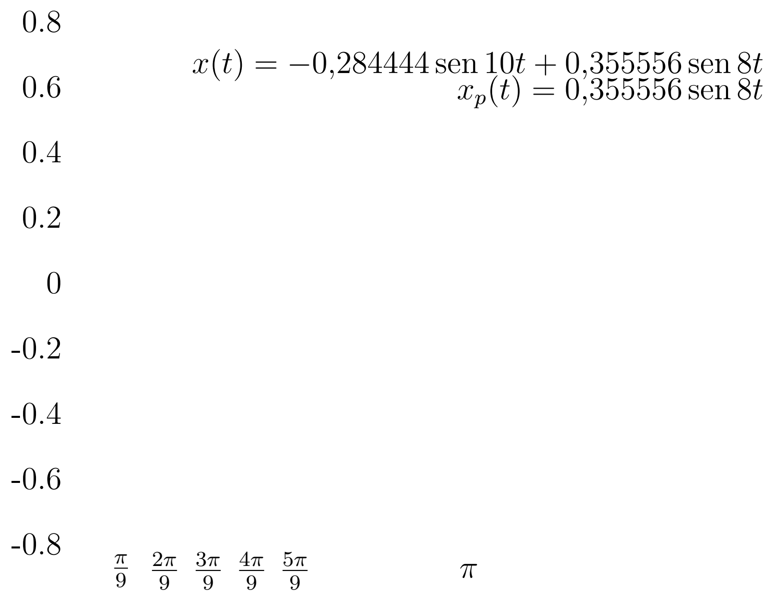
La primera corresponde a puntos de elongación nula que, por las condiciones iniciales dadas, tienen tangente horizontal. La segunda (excepto el valor $m = 0$) da vértices superiores o inferiores de altura distinta, siendo el más alto el que corresponde (por primera vez) a $m = 4$ para negativos (compresión) y a $m = 5$ para positivos (tracción), dando $-0{,}630277$ y $0{,}630277$ respectivamente.

Vemos que los máximos son casi la suma de las dos amplitudes ($0{,}284444 + 0{,}355556 = 0{,}64$) aunque no exactamente. la fuerza ejercida por el muelle se obtiene multiplicando por la constante,

$$F_{max} = 6302{,}77\,\mathrm{N}$$

Todo el proceso se repite cada π segundos, por lo que el periodo T entre máximos será también π.

El gráfico de la elongación (3) ayuda a comprender la discusión anterior:



$x(t) = -0{,}284444\,\mathrm{sen}\,10t + 0{,}355556\,\mathrm{sen}\,8t$
$x_p(t) = 0{,}355556\,\mathrm{sen}\,8t$
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
$\frac{\pi}{9}$
$\frac{2\pi}{9}$
$\frac{3\pi}{9}$
$\frac{4\pi}{9}$
$\frac{5\pi}{9}$
π