Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

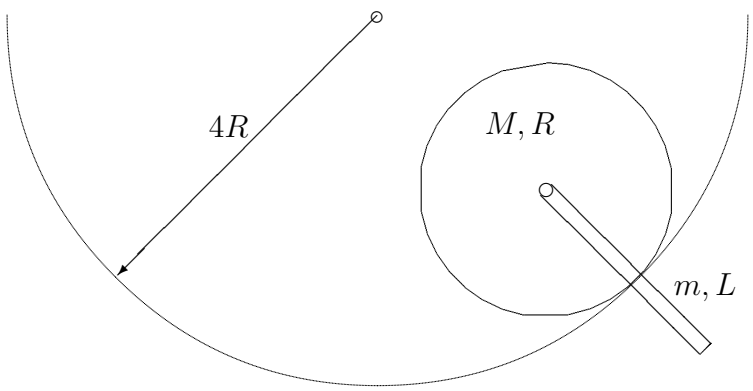
EXAMEN FINAL JUNIO (20 de Junio de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º del Final y del 2.º Parcial Tiempo: 60 min.

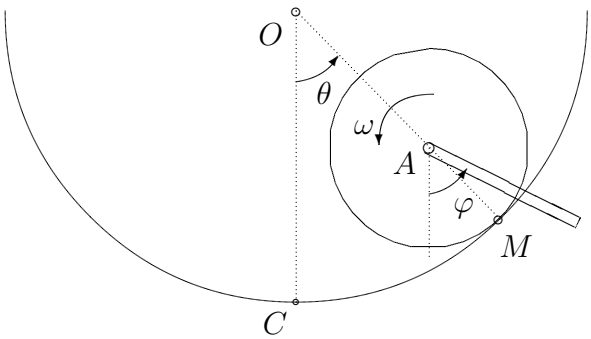
Un disco homogéneo de masa M y radio R rueda sin deslizar en un plano vertical sobre una guía circular de radio $4R$. Una varilla homogénea de masa m y longitud L está articulada por uno de sus extremos al centro del disco. Se pide:

1. Determinar las ecuaciones del movimiento del sistema.
2. Linealizar para pequeños desplazamientos respecto a la posición de equilibrio estable.
3. Para $M = 2m$ y $L = 6R$, calcular las frecuencias propias y los modos de vibración.



---

1. El sistema tiene 2 grados de libertad, que tomaremos como el ángulo $\theta = \widehat{COM}$ de posición del centro del disco que rueda, y el ángulo φ de giro absoluto de la varilla, según indica la figura.



En primer lugar debemos calcular la velocidad absoluta de rotación del disco, para lo que igualamos la expresión de la velocidad de A calculada por una parte como una trayectoria circular alrededor de O con velocidad $\dot{\theta}$ y radio $3R$, y por otra como una rotación instantánea alrededor del centro de rodadura M:

$$3R\dot{\theta} = -\omega R \quad \Rightarrow \quad \omega = -3\dot{\theta}$$

Calculamos la energía cinética,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M(3R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)(3\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{L}{2}\dot{\varphi}\right)^2 + (3R\dot{\theta})^2 + 2\cdot 3R\frac{L}{2}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mL^2\right)\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

y el potencial,

$$V = -Mg3R\cos\theta - mg(3R\cos\theta + \frac{L}{2}\cos\varphi).$$

Resulta entonces la Lagrangiana

$$\begin{aligned} L &= \frac{27}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{9}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6}mL^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{2}mRL\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) \\ &\quad + 3(M+m)gR\cos\theta + \frac{1}{2}mgL\cos\varphi \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{27}{2}M + 9m\right)R^2\ddot{\theta} + \frac{3}{2}mRL\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta) - \frac{3}{2}mRL\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}(\varphi-\theta) + 3(M+m)gR\operatorname{sen}\theta \\ 0 &= \frac{3}{2}mRL\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta) + \frac{1}{3}mL^2\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}mRL\dot{\theta}^2\operatorname{sen}(\varphi-\theta) + \frac{1}{2}mgL\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}$$

2. La posición de equilibrio estable es obviamente $\theta = \varphi = 0$; linealizando para $\theta,\ \varphi,\ \dot{\theta},\ \dot{\varphi}$ pequeños:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{27}{2}M + 9m\right)R^2\ddot{\theta} + \frac{3}{2}mRL\ddot{\varphi} + 3(M+m)gR\theta \\ 0 &= \frac{3}{2}mRL\ddot{\theta} + \frac{1}{3}mL^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}mgL\varphi = 0 \end{aligned}$$

3. Sustituyendo los valores $M = 2m$, $L = 6R$:

$$\begin{aligned} 0 &= 18MR^2\ddot{\theta} + \frac{9}{2}MR^2\ddot{\varphi} + \frac{9}{2}MgR\theta \\ 0 &= \frac{9}{2}MR^2\ddot{\theta} + 6MR^2\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}MgR\varphi \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se expresan matricialmente como

$$\mathbf{M}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \mathbf{K}\begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

siendo

$$\mathbf{M} = MR^2\begin{pmatrix} 18 & 9/2 \\ 9/2 & 6 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = MgR\begin{pmatrix} 9/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica del problema de autovalores es

$$|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = (MR^2)^2\left[\left(\frac{9}{2}\frac{g}{R} - 18\omega^2\right)\left(\frac{3}{2}\frac{g}{R} - 6\omega^2\right) - \left(\frac{9}{2}\omega^2\right)^2\right]$$

Expresión que se ve fácilmente que es una diferencia de cuadrados, por lo que las raíces se obtienen fácilmente resultando las frecuencias propias:

$$\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\frac{g}{R} - 6\omega^2\right) - \frac{9}{2}\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 = \frac{4-\sqrt{3}}{}\frac{g}{}$$

$$\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\frac{g}{R} - 6\omega^2\right) + \frac{9}{2}\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2^2 = \frac{4+\sqrt{3}}{13}\frac{g}{R}$$

Por último, los modos de vibración son los autovectores correspondientes a los autovalores anteriores; al quedar indefinidos respecto de un parámetro tomaremos el primer término de cada modo como la unidad:

$$(\mathbf{K} - \omega_1^2\mathbf{M})\{\mathbf{u}_1\} = \{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{u}_1\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{3} \end{array} \right\}$$

$$(\mathbf{K} - \omega_2^2\mathbf{M})\{\mathbf{u}_2\} = \{\mathbf{0}\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{u}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\sqrt{3} \end{array} \right\}$$

Este resultado final se puede comprobar verificando la ortogonalidad de los modos respecto de la matriz de masas,

$$\{\mathbf{u}_1\}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\{\mathbf{u}_1\} = 0.$$