Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL JUNIO (20 de Junio de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º del Final y 1.º del 2.º Parcial — Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos, mientras que si se pide *expresar* no es necesaria la demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

A un punto Q de un sólido $\mathcal{B}$ se le comunica un movimiento impuesto de aceleración $\ddot{\boldsymbol{r}}_Q$, no existiendo más restricciones ni fuerzas aplicadas a $\mathcal{B}$. Conocido el tensor de inercia $\boldsymbol{I}_Q$, la masa M y la posición $\boldsymbol{r}_G$ del C.D.M., *obtener* la ecuación (vectorial) de la dinámica (ecuación de Euler). (2.5 ptos.)

Tomando un sistema (SQ) no inercial sin giro y origen en Q, la aceleración de arrastre es debida únicamente a la traslación, $\ddot{\boldsymbol{r}}_Q$ (la de Coriolis es obviamente nula). El momento en Q de las fuerzas de inercia viene dado por la integral

$$-\int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_Q) \wedge \ddot{\boldsymbol{r}}_Q \rho \, dV = -(\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}_Q) \wedge M\ddot{\boldsymbol{r}}_Q$$

La dinámica relativa a (SQ) es la de un sólido con Q fijo, siendo necesario añadir el momento de las fuerzas (ficticias) de inercia, que en este caso son las únicas al no haber fuerzas aplicadas:

$$\boxed{-(\boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}_Q) \wedge M\ddot{\boldsymbol{r}}_Q = \boldsymbol{I}_Q \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega})}$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad instantánea de rotación de $\mathcal{B}$.

Obtener La expresión de la tensión en un punto cualquiera de un hilo homogéneo de peso q por unidad de longitud deduciéndola a partir de la ecuación de equilibrio del hilo. (2.5 ptos.)

La ecuación vectorial es

$$d\boldsymbol{T} + \boldsymbol{F} ds = 0;$$

considerando que $\boldsymbol{F} = -q\boldsymbol{k}$ (peso propio del cable) y proyectando sobre la tangente al hilo $\boldsymbol{t}$,

$$\underbrace{d\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{t}}_{dT} - q \underbrace{\boldsymbol{k} ds \cdot \boldsymbol{t}}_{dz} = 0$$

e integrando se obtiene directamente

$$T = qz + C$$

la constante de integración C se puede anular estableciendo adecuadamente el origen de ordenadas z (llamando T_0 a la tensión en el punto más bajo o vértice de la catenaria, basta situarlo a una distancia $a \stackrel{\text{def}}{=} T_0/q$ por debajo del vértice), resultando

$$\boxed{T = qz}$$

Expresión del tensor central de inercia para un sólido $\mathcal{B}$ cualquiera y propiedades del mismo. (2.5 ptos.)

La expresión tensorial es

$$\boldsymbol{I}_G = \int_{\mathcal{B}} (GP^2\mathbf{1} - \boldsymbol{GP} \otimes \boldsymbol{GP})\rho \mathbf{dV}$$

y en componentes

$$(I_G)_{ij} = \int_{\mathcal{B}} (GP^2\delta_{ij} - GP_iGP_j)\rho dV$$

que matricialmente da lugar a

$$\mathsf{I}_G = \begin{pmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Como propiedades principales se pueden citar las siguientes:

- En función de $\boldsymbol{I}_G$ se obtiene la expresión del momento cinético en G, $\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}$, y la de la energía cinética $T = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}$.
- El momento de inercia respecto de un eje $(G, \boldsymbol{u})$ dado vale $(I_G)_u = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{u}$.
- Los elementos de la diagonal principal son los momentos de inercia respecto de los ejes del triedro ortonormal de referencia, I_{xx}, I_{yy}, e I_{zz}.
- $\boldsymbol{I}_G$ es definido positivo y simétrico.
- La contracción de $\boldsymbol{I}_G$ es un invariante escalar llamado momento de inercia polar: $I_G = \mathrm{tr}(\boldsymbol{I}_G)$.

Discutir el significado físico de la función Hamiltoniana H y su relación con la denominada integral de Jacobi o integral de la energía de la dinámica Lagrangiana. (2.5 ptos.)

La función Hamiltoniana se define como

$$\boxed{H(q_i, p^i, t) = p^i\dot{q}_i - L}$$

debiendo quedar expresada en función de las coordenadas q_i, momentos $p^i \stackrel{\text{def}}{=} \partial L/\partial\dot{q}_i$ y t. El valor numérico de la Hamiltoniana coincide con el de la integral de Jacobi h, diferenciándose de ésta tan sólo en la dependencia funcional, que para h es $(q_i, \dot{q}_i, t)$ como corresponde a la mecánica Lagrangiana.

Al igual que h, cuando no existan enlaces móviles H representará físicamente la energía total:

$$\boxed{H = T + V}$$

En el caso que existan enlaces o sistemas de coordenadas móviles H no representará la energía total. En todo caso H se conservará siempre que $\partial H/\partial t = -\partial L/\partial t = 0$.