Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL JUNIO (20 de Junio de 1995)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º del Final y del 1.º Parcial Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos, mientras que si se pide *expresar* no es necesaria la demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

Sea un sistema binario aislado constituido por dos partículas de masas m_1 y m_2 que se atraen con una fuerza central proporcional a su distancia s, es decir, $F = -ks$. *Obtener* la expresión de las energías potencial y cinética del conjunto en *función exclusivamente* de la velocidad de su C.D.M. (v_G), su distancia (s), y el ángulo (φ) que forma el segmento $m_1\, m_2$ con una dirección fija. (5 ptos.)

La energía potencial, al estar aislado el sistema, proviene exclusivamente del resorte

$$\boxed{V = \frac{1}{2}ks^2}$$

Aplicaremos el teorema de Koenig para la energía cinética. Llamando s_1 y s_2 a las distancias de m_1 y m_2 al C.D.M. G la expresión es

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{s}_1^2 + s_1^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{s}_2^2 + s_2^2\dot{\varphi}^2);$$

eliminando s_1 y s_2 en función de s,

$$\left.\begin{array}{rcl} m_1 s_1 & = & m_2 s_2 \\ s_1 + s_2 & = & s \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad s_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}s; \quad s_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}s$$

resulta finalmente

$$\boxed{T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2)}$$

Discutir la existencia de integrales primeras para un sistema material general descrito por coordenadas generalizadas $\{q_i\}$ con Lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. (2.5 ptos.)

A partir de las ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

se deduce que si una coordenada q_k no entra explícitamente en la expresión de L se conserva el momento generalizado correspondiente:

$$\boxed{\text{si} \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{cte} \quad (q_k \,\text{cíclica})}$$

por otra parte, desarrollando la derivada de L,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

deduciéndose entonces que

$$\boxed{\text{si} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L = \text{cte}} \quad \text{(integral de Jacobi)}$$

En el caso en que no existan sistemas de coordenadas móviles la expresión de la energía cinética será homogénea de grado 2 en $\dot{q}_i$ y la integral de Jacobi coincidirá con la energía total, $h = T + V$.

En ocasiones es también posible establecer directamente la constancia de $T + V$ por razonamientos de tipo físico (fuerzas conservativas).

Obtener la amplitud del movimiento oscilatorio en régimen permanente para un oscilador lineal con amortiguamiento sometido a excitación armónica, $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = q \operatorname{sen} \Omega t$. (2.5 ptos.)

La solución en régimen permanente corresponde a una solución particular del tipo $x_p = A \operatorname{sen}(\Omega t + \delta)$. Sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$(k - m\Omega^2)\operatorname{sen}(\Omega t + \delta) + c\Omega\cos(\Omega t + \delta) = \frac{q}{A}\operatorname{sen}\Omega t.$$

Particularizando

$$\begin{aligned} t = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad (k - m\Omega^2)\operatorname{sen}\delta + c\Omega\cos\delta = 0 \\ \Omega t + \delta = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad c\Omega = -\frac{q}{A}\operatorname{sen}\delta \end{aligned}$$

y eliminando δ resulta

$$\tan\delta = -\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}; \quad A = -\frac{q}{c\Omega}\frac{\tan\delta}{\sqrt{1 + \tan^2\delta}}$$

es decir

$$\boxed{A = \frac{q}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}}}$$