Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

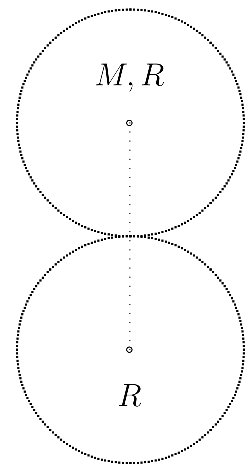
Mecánica

1er. EXAMEN PARCIAL (3 de Febrero de 1995)

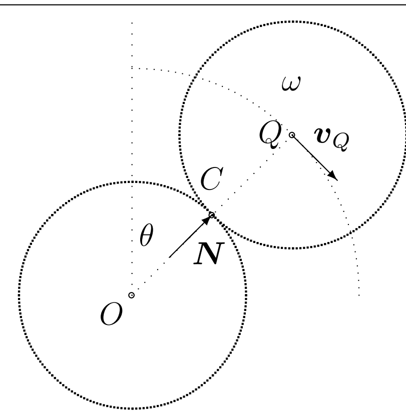
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 4.º Tiempo: 60 min.

Sobre un disco vertical fijo, de radio R, puede rodar sin deslizar otro disco vertical, homogéneo, del mismo radio y masa M, estando sus centros unidos por un muelle de constante elástica K y longitud natural R que no estorba la rodadura. Suponiendo que el disco móvil se desplaza ligeramente desde su posición superior de equilibrio en reposo, obtener:



1. ecuación diferencial que define el movimiento en un instante genérico;
2. valor mínimo de K para que no se produzca despegue entre ambos discos.



En primer lugar calculamos la velocidad de rotación del disco móvil, ω. Su centro Q describe una circunferencia de radio $2R$; Denominando θ al ángulo que forma OQ con la vertical, igualamos la velocidad de Q con la producida por la rodadura ω alrededor de C:

$$v_Q = \dot\theta\, 2R = \omega R \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\dot\theta$$

Suponiendo que no se produce despegue entre los discos, la Lagrangiana es

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}M(2R\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)4\dot\theta^2 - Mg2R\cos\theta \\ &= 3MR^2\dot\theta^2 - 2MgR\cos\theta \end{aligned}$$

La ecuación de Lagrange correspondiente es

$$\boxed{6MR^2\ddot\theta - 2MgR\operatorname{sen}\theta = 0} \tag{1}$$

Asimismo se conserva la energía, por lo que considerando que parte de la posición superior en reposo, se obtiene la integral primera

$$\boxed{T + V = 3MR^2\dot\theta^2 + 2MgR\cos\theta = 2MgR} \tag{2}$$

Calculamos la reacción normal N sobre el disco, expresando la ecuación dinámica en esa dirección:

$$N - Mg\cos\theta - K(2R - R) = -M\,2R\dot\theta^2$$

Eliminando $\dot{\theta}$ a partir de (2), la expresión de N resulta

$$N = KR - \frac{4}{3}Mg + \frac{7}{3}Mg\cos\theta$$

El despegue se producirá si llega a anularse N. La posición más desfavorable es por tanto para el mínimo de N, lo que se produce en el punto inferior, para $\theta = \pi$. Tomando $N = 0$ en este punto,

$$KR = \frac{4}{3}Mg - \frac{7}{3}Mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = \frac{11}{3}\frac{Mg}{R}}$$

Cualquier valor de K superior a éste garantizaría que ambos discos no se despeguen en ningún instante.