Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

1er. EXAMEN PARCIAL (3 de Febrero de 1995)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones *dentro del espacio provisto* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas. Cuando se pida *obtener* o *demostrar* un resultado deberá justificarse debidamente el procedimiento. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no deberá entregarse.

Enunciar el Principio de Hamilton. ¿Qué relación guarda con las ecuaciones de Lagrange? (2.5 ptos.)

Sea un sistema material descrito mediante coordenadas libres $\{q_j\}$ con función Lagrangiana $L(q_j, \dot{q}_j, t)$.

Entre dos instantes t_1 y t_2, caracterizados por las configuraciones respectivas $\{q_j^{(1)}\}$ y $\{q_j^{(2)}\}$, el sistema evoluciona de forma que la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t)\, dt$$

adopta un valor estacionario para la trayectoria real $q_j(t)$ del sistema."

El principio de Hamilton es una formulación *"global"* que determina la evolución dinámica del sistema, equivalente a las ecuaciones de Lagrange, que son la formulación *"local"* correspondiente.

Obtener la expresión del teorema del momento cinético en el sistema de referencia del centro de masas (SCM), para un sistema material cualquiera. (2.5 ptos.)

El momento cinético respecto a G en el S.C.M. es:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_G^{SCM} &= \sum_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G) \wedge m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_G) \\
&= \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i}_{\boldsymbol{H_O}} - \underbrace{\boldsymbol{r}_G \wedge \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i}_{\boldsymbol{r}_G \wedge M\boldsymbol{v}_G} - \underbrace{\left(\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G)\right)}_{\boldsymbol{0}} \wedge \boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{H}_O - \boldsymbol{r}_G \wedge M\boldsymbol{v}_G.
\end{aligned}$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_G^{SCM} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_O - \underbrace{\boldsymbol{v}_G \wedge M\boldsymbol{v}_G}_{\boldsymbol{0}} - \boldsymbol{r}_G \wedge \underbrace{M\boldsymbol{a}_G}_{\boldsymbol{F}} = \underbrace{\boldsymbol{M}_O - \boldsymbol{r}_G \wedge \boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{M}_G}$$

luego:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\boldsymbol{H}_G^{SCM} = \boldsymbol{M}_G}$$

Es decir, se verifica la ecuación del Momento Cinético respecto del origen G del S.C.M., exactamente igual que si fuese inercial.

Sea un sistema lineal de 1 g.d.l. descrito por la ecuación $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$. *Obtener* el valor máximo de c para que se llegue a producir un movimiento de tipo oscilatorio (amortiguamiento crítico), expresando asimismo la pseudo-frecuencia de este movimiento. (2.5 ptos.)

Al ensayar una solución del tipo $x(t) = ae^{rt}$, que como se sabe da lugar a funciones armónicas para exponente imaginario, resulta la ecuación característica:

$$(mr^2 + cr + k)e^{rt} = 0 \quad \Rightarrow \qquad mr^2 + cr + k = 0.$$

Las soluciones son

$$r = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m};$$

Para el movimiento oscilatorio, el exponente r ha de ser imaginario: $c^2 - 4km < 0$. Por tanto el amortiguamiento crítico es

$$\boxed{c_{crit} = 2\sqrt{km}}$$

La solución general se compone de una exponencial decreciente multiplicando a funciones armónicas:

$$x = e^{-\frac{c}{2m}t}[(a_1 + a_2)\cos\omega t + i(a_1 - a_2)\operatorname{sen}\omega t]$$

siendo $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{c^2}{4m^2}}$ la pseudo-frecuencia angular del movimiento oscilatorio. No se trata en rigor de un movimiento periódico, al no repetirse idénticamente al cabo de un periodo; es más apropiado pues el término "pseudo-frecuencia" definido a partir del tiempo entre dos máximos consecutivos del movimiento oscilatorio $x(t)$.

En el movimiento plano de un sólido se conoce en cada instante la posición del centro de rotación $\boldsymbol{r}_C(t)$ y la velocidad angular $\Omega(t)$. En función de éstas, *obtener* la aceleración de un punto cualquiera P del plano móvil, definido por su posición relativa $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{CP}$. (2.5 ptos.)

El campo de velocidades es una rotación instantánea en torno a C:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{d} = \Omega\boldsymbol{k} \wedge (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_C), \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{r}$ es el vector posición de P, y $\boldsymbol{k}$ es el versor perpendicular al plano del movimiento.

Derivando se obtiene la aceleración:

$$\boldsymbol{a} = \dot{\Omega}\boldsymbol{k} \wedge (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_C) + \Omega\boldsymbol{k} \wedge (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_C),$$

donde $\boldsymbol{v}_C$ es la velocidad de sucesión del C.I.R. como punto geométrico, que en general será no nula salvo si se trata de una rotación alrededor de un punto fijo.

Sustituyendo finalmente el valor de $\boldsymbol{v}$ dado por (1), resulta:

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \dot{\Omega}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{d} - \Omega^2\boldsymbol{d} - \Omega\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{v}_C}$$

En esta expresión, el primer término es tangencial a la trayectoria; el segundo, normal; mientras que el último corresponde a la aceleración del C.I.R. —en efecto, sólo queda este último sumando al particularizar para $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$—, que tiene componentes según ambas direcciones.