Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Enero de 1995)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos, mientras que si se pide *expresar* no es necesaria la demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja.* La hoja de borrador no deberá entregarse.

Obtener la condición de equilibrio para una partícula ligada a una curva lisa, definida como intersección de las superficies $f(\boldsymbol{r}) = 0$ y $g(\boldsymbol{r}) = 0$, bajo una fuerza aplicada $\boldsymbol{F}$. (2.5 ptos.)

Sobre la partícula actúa, además de la fuerza aplicada $\boldsymbol{F}$, una reacción normal a la curva, definida como combinación lineal de las normales a las dos superficies, $\lambda \,\mathbf{grad}\, f + \mu \,\mathbf{grad}\, g$, pudiendo λ y μ tomar valores cualesquiera. La condición de equilibrio es pues

$$\boldsymbol{F} + \lambda \,\mathbf{grad}\, f + \mu \,\mathbf{grad}\, g = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Esta expresión unida a las dos ecuaciones de ligadura

$$f(\boldsymbol{r}) = 0; \quad g(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{2}$$

proporciona las 5 ecuaciones necesarias para resolver las 5 incógnitas en el equilibrio: $\{\boldsymbol{r} \equiv (x, y, z),\ \lambda,\ \mu\}$.

Concepto de ejes principales de inercia de un sólido. *Discutir* si un sólido libre, inicialmente en rotación instantánea alrededor de un eje principal, se mantiene permanentemente girando alrededor de dicho eje. (2.5 ptos.)

Un eje de dirección $\boldsymbol{e}$ por un punto O se dice principal de inercia de un sólido cuando se verifica

$$\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{e} = \lambda \boldsymbol{e} \tag{3}$$

siendo $\boldsymbol{I}_O$ el tensor de inercia en O y λ un escalar cualquiera. El valor de λ que cumple la condición anterior es el momento (principal) de inercia según ese eje.

Suponemos una rotación $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{e}$ según un eje principal. Para que sea permanente ha de ser $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$. Al pertenecer O al eje permanente de rotación, se tratará de un punto fijo. Aplicando las ecuaciones de Euler con $\boldsymbol{M}_O = \mathbf{0}$ (sólido libre):

$$\mathbf{0} = \underbrace{\boldsymbol{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}}_{=\mathbf{0}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

por lo que $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$ han de ser paralelos, condición equivalente a (3). Por tanto, sólo será posible la rotación permanente si la dirección es principal. Por otra parte, para que esta rotación sea estable, la dirección ha de corresponder al máximo o al mínimo de los tres

Expresar la solución general del sistema con n grados de libertad $[\mathsf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathsf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{c}\}$, siendo $\{\mathbf{c}\}$ un vector columna constante dado. Explicar cómo se calculan las constantes de dicha solución en función de condiciones iniciales dadas $\{\mathbf{q}_0\}$, $\{\dot{\mathbf{q}}_0\}$. (2.5 ptos.)

La solución general se puede expresar como suma de la general de la homogénea y una particular de la completa:

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{q}^h\} + \{\mathbf{q}^p\}$$

La solución particular es

$$\{\mathbf{q}^p\} = [\mathsf{K}]^{-1}\{\mathbf{c}\}$$

mientras que $\{\mathbf{q}^h\}$ se expresa como combinación de modos normales:

$$\{\mathbf{q}^h(t)\} = \sum_{k=1}^{n} B_k\{\mathbf{a}_k\}\cos(\omega_k t - \delta_k) \tag{4}$$

siendo ω_k y $\{\mathbf{a}_k\}$ las frecuencias y vectores propios que satisfacen el problema de autovalores

$$[\mathsf{K}]\{\mathbf{a}\} = \omega^2[\mathsf{M}]\{\mathbf{a}\}.$$

Las constantes B_k y δ_k se obtienen particularizando para las condiciones iniciales:

$$\{\mathbf{q}_0\} = \sum_{k=1}^{n} B_k\{\mathbf{a}_k\}\cos\delta_k + [\mathsf{K}]^{-1}\{\mathbf{c}\}; \quad \{\dot{\mathbf{q}}_0\} = \sum_{k=1}^{n} B_k\omega_k\{\mathbf{a}_k\}\operatorname{sen}\delta_k$$

sistema de $2n$ ecuaciones para obtener las $2n$ constantes.

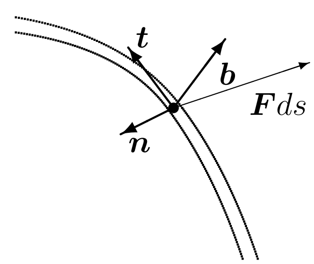
Obtener las ecuaciones de equilibrio de un hilo flexible en las direcciones del triedro intrínseco al hilo (tangente, normal, binormal), actuando sobre el hilo fuerzas externas $\boldsymbol{F}$ por unidad de longitud del mismo. (2.5 ptos.)

La ecuación vectorial del equilibrio es

$$d\boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}ds = \mathbf{0}$$

o, de forma equivalente,

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} + \boldsymbol{F} = \mathbf{0}.$$



Por ser el hilo perfectamente flexible, la tensión $\boldsymbol{T}$ ha de llevar la dirección de la tengente, $\boldsymbol{T} = T\boldsymbol{t}$. Empleando la fórmula de Frenet ($d\boldsymbol{t}/ds = \boldsymbol{n}/R$, siendo $\boldsymbol{n}$ la normal principal y R el radio de curvatura), se obtiene

$$\frac{dT}{ds}\boldsymbol{t} + \frac{T}{R}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{F} = \mathbf{0},$$

o de forma equivalente, según las direcciones del triedro,

$$\begin{cases} F_t = -\dfrac{dT}{ds} \\[2ex] F_n = -\dfrac{T}{R} \\[2ex] F_b = 0 \end{cases}$$