

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Enero de 1995)

Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

Ejercicio 1.º

Tiempo: 45 min.

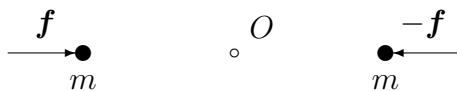
Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara (no a lápiz). Cuando se pida *obtener* un resultado, deberán justificarse debidamente los pasos, mientras que si se pide *expresar* no es necesaria la demostración. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

Sea un sistema general de N partículas $\{m_i\}$, sometido a fuerzas de resultante \mathbf{F} y momento en O fijo \mathbf{M}_O . *Discutir* razonadamente si el movimiento del sistema queda determinado completamente por las ecuaciones siguientes: 1. $\mathbf{F} = \left(\sum_{i=1}^N m_i\right) \ddot{\mathbf{r}}_G$; 2. $\mathbf{M}_O = d\mathbf{H}_O/dt$, siendo G el C.D.M. y \mathbf{H}_O el momento cinético en O . (4 pts.)

Las ecuaciones vectoriales citadas corresponden respectivamente al principio de la cantidad de movimiento (1.) y al principio del momento cinético (2.) para un sistema, por lo que necesariamente se cumplen siempre. Proporcionan 6 ecuaciones escalares, por lo que sólo podrán ser suficientes si el número de grados de libertad es ≤ 6 , aunque este no es el único requisito que garantiza la suficiencia.

Son suficientes en el caso del sólido rígido (6 g.d.l.), en el que no hay desplazamientos relativos entre las partículas.

Sin embargo, cuando el sistema posee varias partículas con movimientos relativos posibles entre ellas, en general las ecuaciones citadas no son suficientes. Basta como ejemplo imaginar un simple caso plano con dos partículas como el descrito en la figura adjunta.



En este caso $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$, sin embargo no se puede determinar el movimiento relativo de las dos partículas conociendo únicamente los valores de estas resultantes. Es preciso conocer la magnitud de las fuerzas \mathbf{f} sobre cada una de ellas.

En el caso más general sería necesario aplicar las ecuaciones

$$\mathbf{f}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \quad (1)$$

para cada una de las partículas del sistema, siendo \mathbf{f}_i la resultante de las fuerzas sobre m_i .

En la práctica el método más recomendable, en lugar de aplicar las ecuaciones (1) a las N partículas, suele ser el de complementar las ecuaciones dinámicas (1.) y (2.) para el conjunto del sistema, con ecuaciones similares para subsistemas o partes del conjunto. Conviene escoger estos subsistemas de forma que sean "rígidos" (sin movimientos relativos) siendo para cada uno de ellos (1.) y (2.) ecuaciones suficientes. Debe considerarse que al dividir en subsistemas aparecen incógnitas adicionales, de los vínculos existentes entre ellos. Sin embargo, el número de ecuaciones independientes adicionales es mayor que el número de incógnitas nuevas, obteniéndose finalmente un sistema con un número suficiente de ecuaciones para determinar los movimientos de las partículas.

Sea un sólido con movimiento general definido en un instante por la velocidad de un punto \mathbf{v}_O y la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$. *Obtener* la expresión vectorial del lugar geométrico de los puntos cuya velocidad es paralela a $\boldsymbol{\Omega}$ en un instante dado. (3 ptos.)

El campo de velocidades es $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}$. Para que sea $\mathbf{v} = \lambda \boldsymbol{\Omega}$ se obtiene la ecuación vectorial en \mathbf{r}

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r} = -\mathbf{v}_O + \lambda \boldsymbol{\Omega} \quad (2)$$

La compatibilidad de esta ecuación (el término a la derecha debe ser normal al vector $\boldsymbol{\Omega}$) exige $\lambda = \mathbf{v}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} / \Omega^2$. Multiplicando vectorialmente (2) por $\boldsymbol{\Omega}$,

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\Omega} - \Omega^2 \mathbf{r} = -\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O$$

de donde se obtiene la expresión de \mathbf{r} ,

$$\mathbf{r} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_O}{\Omega^2} + \alpha \boldsymbol{\Omega} \quad (3)$$

siendo α un escalar arbitrario que permite agrupar las componentes indeterminadas de la solución en dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ (si se suma a \mathbf{r} un término paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$ el resultado en la ecuación (2) no varía).

El Lugar geométrico resultante, definido por (3), es pues un eje en dirección de $\boldsymbol{\Omega}$.

Un sistema posee una función Lagrangiana $L(q_j, \dot{q}_j)$ que no depende explícitamente del tiempo. *Demostrar* que siempre posee una integral primera y *Obtener* su expresión, discutiendo si coincide o no con la energía total del sistema. (3 ptos.)

Derivando la Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \end{aligned}$$

Llamando $p_j \stackrel{\text{def}}{=} \partial L / \partial \dot{q}_j$ (momentos generalizados), resulta

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (p^j \dot{q}_j) \Rightarrow \frac{d}{dt} (p^j \dot{q}_j - L) = 0$$

por lo que la magnitud

$$h \stackrel{\text{def}}{=} p^j \dot{q}_j - L \quad (\text{integral de Jacobi})$$

se conserva. Esta coincide con la energía total ($T + V$) si no existen sistemas de referencia móviles ($\partial \mathbf{r}_k / \partial t = \mathbf{0}$), ya que en este caso la Energía cinética es una expresión homogénea de 2.º grado en \dot{q}_j :

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} a_{il} \dot{q}_i \dot{q}_l \right) = a_{ij} \dot{q}_i \\ h &= a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - (T - V) = T + V \end{aligned}$$

Como se quería demostrar.