Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Septiembre de 1994)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

Deducir de forma razonada la expresión del momento cinético de un sólido respecto de un punto cualquiera A, de posición conocida ($\boldsymbol{r}_A$) pero no necesariamente fijo, supuesto que se conoce también la posición y velocidad del C.D.M. ($\boldsymbol{r}_G$ y $\boldsymbol{v}_G$), el tensor central de inercia ($\boldsymbol{I}_G$), la velocidad de rotación ($\boldsymbol{\Omega}$) y la masa (M). (5 ptos.)

Desarrollando la integral que define el momento cinético, en función de $\boldsymbol{r}_G$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_A &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_A)\wedge\rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\\ &= \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_G)\wedge\rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{r}_G-\boldsymbol{r}_A)\wedge\rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V;\end{aligned}$$

la primera de las integrales la desarrollamos mediante la expresión del campo de velocidades, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_G+\boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_G)$, y para la segunda tenemos en cuenta que $(\boldsymbol{r}_G-\boldsymbol{r}_A)$ es constante en el dominio de integración; consideramos también las propiedades del C.D.M., $\int_{\mathcal{B}}\boldsymbol{r}\rho\,\mathrm{d}V=M\boldsymbol{r}_G$, y $\int_{\mathcal{B}}\boldsymbol{v}\rho\,\mathrm{d}V=M\boldsymbol{v}_G$. Así,

$$\boldsymbol{H}_A = \underbrace{\int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_G)\wedge\rho\boldsymbol{v}_G\,\mathrm{d}V}_{=\boldsymbol{0}} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_G)\wedge\rho[\boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_G)]\,\mathrm{d}V}_{=\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}} + (\boldsymbol{r}_G-\boldsymbol{r}_A)\wedge M\boldsymbol{v}_G$$

Se ve inmediatamente que el segundo sumando en la expresión anterior corresponde a la definición de tensor de inercia en G. Resulta entonces finalmente

$$\boxed{\boldsymbol{H}_A = \boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} + (\boldsymbol{r}_G-\boldsymbol{r}_A)\wedge M\boldsymbol{v}_G.}$$

¿Se puede describir el campo de aceleraciones de un sólido mediante un movimiento helicoidal tangente? *Responder de forma razonada.* (2.5 ptos.)

El movimiento helicoidal tangente (o instantáneo) describe el campo de velocidades del sólido como el de un sacacorchos con velocidad axial $\boldsymbol{v}_O$ y velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$, dando lugar a un campo de momentos:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}.$$

El campo de aceleraciones viene definido por

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})$$

A partir del movimiento helicoidal instantáneo se puede deducir el término “axípeto” $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})$, pero no $\boldsymbol{a}_O$ ni $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{r}$. $\boldsymbol{a}_O$ no plantea problemas, ya que sería posible tomar como O el polo de aceleraciones (en que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$), pero el segundo término no se anula en un caso general.

Por lo tanto, el movimiento helicoidal tangente es una descripción del movimiento que *no define el campo de aceleraciones,* siendo válida únicamente para el campo de velocidades.

Expresar las ecuaciones del movimiento de una partícula sobre un plano horizontal, atraída hacia un punto del mismo por un resorte lineal, *identificando* el tipo de trayectoria seguida. (2.5 ptos.)

La ecuación dinámica para una masa m sujeta a un resorte de constante k es

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -k\boldsymbol{r}$$

y en componentes cartesianas (x, y)

$$m\ddot{x} + kx = 0; \quad m\ddot{y} + ky = 0.$$

Las soluciones a ambas ecuaciones son de tipo armónico, con igual frecuencia angular ($\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}$),

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha); \quad y = B\cos(\omega_0 t + \beta),$$

siendo A, B, α, β constantes función de las condiciones iniciales. Operando se puede eliminar el parámetro t, quedando como ecuación implícita de la trayectoria

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos(\beta - \alpha) = \operatorname{sen}^2(\beta - \alpha).$$

Esta ecuación corresponde a una elipse inscrita en el cuadrilátero de origen en O y semilados A y B.