Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (30 de Mayo de 1994)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

Demostrar que en un sólido el momento de inercia respecto de un eje de dirección dada es mínimo si pasa por el centro de masas. (2.5 ptos.)

El teorema de Steiner relaciona, para una dirección $\boldsymbol{e}$ dada, el momento de inercia en un punto O cualquiera con el correspondiente al centro de masas G:

$$(I_e)_O = (I_e)_G + M\mathrm{d}^2$$

siendo d la distancia de O al eje $(G, \boldsymbol{e})$. Al ser el término adicional esencialmente positivo, queda claro que si $O \neq G$ es $(I_e)_O > (I_e)_G$.

Obtener la ecuación fundamental (balance de la cantidad de movimiento) para un sistema de masa variable. (2.5 ptos.)

Sea M la masa total (variable) del sistema, $\boldsymbol{v}$ la velocidad de su C.D.M., y $\boldsymbol{F}$ la resultante de fuerzas externas. Al sistema se incorpora una masa $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ por unidad de tiempo, y velocidad absoluta $\boldsymbol{u}$. El balance de la cantidad de movimiento en un intervalo infinitesimal $\mathrm{d}t$ se expresa como

$$\boldsymbol{F}\mathrm{d}t = (M + \mathrm{d}M)(\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}) - (M\boldsymbol{v} + \mathrm{d}M\boldsymbol{u})$$

despreciando infinitésimos de segundo orden resulta

$$\boxed{M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\underbrace{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})}_{\boldsymbol{v}_{rel}} + \boldsymbol{F}}$$

Definir, para un sistema lineal con n grados de libertad, el concepto de coordenadas normales y *explicar* su utilidad. (2.5 ptos.)

La solución general a las vibraciones libres sin amortiguamiento viene dada por una combinación lineal de modos normales, afectados de funciones armónicas:

$$\{\mathbf{q}\} = \sum_{k=1}^{n} B_k \{\mathbf{a}_k\} \cos(\omega_k t - \delta_k).$$

Se definen como coordenadas normales los coeficientes

$$u_k(t) = B_k \cos(\omega_k t - \delta_k) \qquad (k \text{ no sumado})$$

La expresión anterior define un cambio de coordenadas,

$$q_i(t) = a_{ki} u_k(t)$$

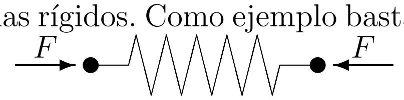
donde a_{ki} es la componente i del modo $\{\mathbf{a}_k\}$. En función de las coordenadas normales las ecuaciones del movimiento resultan desacopladas,

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = 0, \qquad k = 1, \dots n \qquad (k \text{ no sumado})$$

Discutir en qué casos las condiciones ($\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = \mathbf{0}$; $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i = \mathbf{0}$) son a) necesarias, b) suficientes para el equilibrio de un sistema general de N partículas. (2.5 ptos.)

Las condiciones dadas constituyen las llamadas ecuaciones cardinales o universales de la estática. Son *condiciones necesarias* para el equilibrio de todo sistema.

Sin embargo *en general no son suficientes* para garantizar el equilibrio. Tan sólo son condiciones suficientes para los sistemas rígidos. Como ejemplo basta considerar el siguiente sistema:



Este sistema no está necesariamente en equilibrio, aunque se cumplen las ecuaciones cardinales.

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (30 de Mayo de 1994)

BORRADOR