Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

1er. EXAMEN PARCIAL (28 de Enero de 1994)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no deberá entregarse.

Demostrar porqué, para un sistema mecánico general de n partículas, se cumple respecto al sistema de referencia del centro de masas la ecuación del momento cinético tomando momentos en G. ¿Se trata de un sistema de referencia inercial? (2.5 ptos.)

La expresión del momento cinético respecto de G en el S.C.M. es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_G^{SCM} &= \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G) \wedge (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_G) \\ &= \boldsymbol{H}_O - M\boldsymbol{r}_G \wedge \boldsymbol{v}_G; \end{aligned}$$

derivando,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G^{SCM}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} - \overbrace{M\boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{v}_G}^{\boldsymbol{0}} - M\boldsymbol{r}_G \wedge \boldsymbol{a}_G \\ &= \boldsymbol{M}_O - \boldsymbol{r}_G \wedge \sum_i \boldsymbol{F}_i^{ext} = \boldsymbol{M}_G \end{aligned}$$

Como vemos se cumple la ecuación del momento cinético $\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G^{SCM}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_G}$, a pesar de que *el S.C.M. no es un sistema inercial.*

Demostrar porqué, en el movimiento de un sistema rígido, la derivada temporal del vector velocidad de rotación del sistema es igual independientemente de que la mida un observador fijo o un observador ligado al triedro móvil. (2.5 ptos.)

La fórmula de derivación de un vector cualquiera $\boldsymbol{p}$ respecto a un sistema móvil con velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ es

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right|_{abs} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right|_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{p};$$

Aplicándola para $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\Omega}$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right|_{abs} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right|_{rel} + \overbrace{\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega}}^{\boldsymbol{0}},$$

c.q.d.

Enunciar El principio de Hamilton, y su generalización para el caso en que existan fuerzas no conservativas. Explicar la relación que guarda este principio con las ecuaciones de Lagrange. (2.5 ptos.)

"El movimiento de un sistema definido por una función Lagrangiana $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ entre dos instantes dados t_1 y t_2 es tal que la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \,\mathrm{d}t$$

toma un valor estacionario (extremo) para el movimiento real $q_j(t)$."

Si no existe potencial, se puede generalizar esta expresión, tomando variaciones $\delta q_j(t)$ sin variar el tiempo ($\delta t = 0$), tales que $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + Q^j \delta q_j) \,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall \delta q_j.$$

Para un oscilador lineal con amortiguamiento viscoso y sometido a una excitación armónica dada ($m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = q \operatorname{sen} \Omega t$), *justificar,* partiendo de la solución general del movimiento, porqué el movimiento en el régimen permanente no depende de las condiciones iniciales. (2.5 ptos.)

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las soluciones completas para dos conjuntos de condiciones iniciales distintas, $\{(x_1)_0, (\dot{x}_1)_0\}$, $\{(x_2)_0, (\dot{x}_2)_0\}$. Ambas deben cumplir la ecuación, por lo que

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 &= q \operatorname{sen} \Omega t, \\ m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 &= q \operatorname{sen} \Omega t. \end{aligned}$$

restando ambas expresiones, se obtiene que la diferencia $(x_1(t) - x_2(t))$ cumple la ecuación homogénea:

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + c(\dot{x}_1 - \ddot{x}_2) + k(x_1 - x_2) = 0.$$

Sabemos que la solución de esta ecuación es una función armónica afectada de una exponencial decreciente. Por lo tanto, al cabo de un tiempo suficiente ($t \to \infty$) la diferencia entre x_1 y x_2 desaparece en la práctica ($(x_1 - x_2) \to 0$). Así, en el régimen permanente, ambas soluciones serán iguales, no dependiendo de las condiciones iniciales.