Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de Enero de 1994)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º Tiempo: 40 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y referidas directamente a la pregunta, escritas con letra clara *a tinta*. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les repartirá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*. La hoja de borrador no se recogerá.

Enunciar el principio del momento cinético para un sistema general de n partículas, y discutir en la expresión resultante respecto de qué puntos es válido tomar momentos. (2.5 ptos.)

> *"El momento de las fuerzas exteriores de un sistema respecto de un punto fijo O es igual a la derivada respecto del tiempo del momento cinético del sistema respecto del mismo punto."*

La ecuación es:

$$\boxed{\boldsymbol{M}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{H}_O}$$

siendo $\boldsymbol{M}_O = \sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i^{ext}$ la resultante de los momentos de las fuerzas exteriores, y $\boldsymbol{H}_O = \sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i$, el momento cinético del sistema respecto de O.

Esta ecuación es válida cuando O es un punto fijo, o bien si se trata del centro de masas ($O \equiv G$).

En un sistema binario gravitatorio aislado formado por dos masas M y m, *obtener* una expresión de la energía total de m en función tan sólo de la distancia entre ambas r, su derivada $\dot{r}$ y las constantes del movimiento. (2.5 ptos.)

La expresión de la energía es, teniendo en cuenta que la masa efectiva para el movimiento de m respecto de M es $M^* = M + m$, y empleando coordenadas polares:

$$E = V + T = -\frac{G(M+m)m}{r} + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

la constancia de la velocidad areolar (que se deduce de la conservación del momento cinético respecto del centro de las fuerzas) arroja

$$r^2\dot{\varphi} = C,$$

siendo C la constante de las áreas (el doble de la velocidad areolar). Eliminando $\dot{\varphi}$ resulta finalmente la expresión pedida:

$$\boxed{E = -\frac{G(M+m)m}{r} + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}).}$$

Obtener la expresión de las fuerzas (ficticias) inerciales que aparecen al considerar un triedro de referencia ligado a un punto de la superficie de la tierra de latitud λ (tomar los ejes Ox hacia el Este, Oy hacia el Norte, Oz vertical ascendente). (2.5 ptos.)

En un sistema de referencia no inercial es preciso añadir a las fuerzas actuantes sobre cada partícula las fuerzas de inercia:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{arr} &= -m[\boldsymbol{a}_O + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})] \\ \boldsymbol{F}_{cor} &= -m[2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{rel}] \end{aligned}$$

En unos ejes ligados a un punto O de la superficie de la tierra ($\boldsymbol{k}$ vertical; $\boldsymbol{i}$ hacia el Este; $\boldsymbol{j}$ hacia el Norte), considerando el centro de ésta como fijo, suponiendo que la altura sobre la superficie es pequeña comparada con el radio de la tierra, y considerando la velocidad constante de rotación de la misma $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(\cos\lambda \boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\lambda \boldsymbol{k})$, la fuerza de arrastre es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_a rr &= -m[\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge R\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\rho})] \\ &\approx -m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge R\boldsymbol{k}) \\ &= -m\Omega^2 R \cos\lambda(\operatorname{sen}\lambda \boldsymbol{j} - \cos\lambda \boldsymbol{k}) \end{aligned}$$

y la de Coriolis

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{cor} &= -m[2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v}_{rel}] \\ &= -m[\Omega(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\operatorname{sen}\lambda)\boldsymbol{i} + \dot{x}\operatorname{sen}\lambda \boldsymbol{j} - \dot{x}\cos\lambda \boldsymbol{k}] \end{aligned}$$

Para un oscilador lineal con amortiguamiento viscoso y sometido a una excitación armónica dada ($m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = q\operatorname{sen}\Omega t$), *justificar,* partiendo de la solución general del movimiento, porqué el movimiento en el régimen permanente no depende de las condiciones iniciales. (2.5 ptos.)

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ las soluciones completas para dos conjuntos de condiciones iniciales distintas. Ambas cumplen la ecuación, por lo que

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 &= q\operatorname{sen}\Omega t, \\ m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 &= q\operatorname{sen}\Omega t. \end{aligned}$$

restando ambas expresiones, se obtiene que la diferencia $(x_1(t) - x_2(t))$ cumple la ecuación homogénea:

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + c(\dot{x}_1 - \ddot{x}_2) + k(x_1 - x_2) = 0,$$

solución que como sabemos desaparece con el tiempo, al estar afectada de una exponencial decreciente. Por lo tanto, al cabo de un tiempo suficiente (es decir, en el régimen permanente) las dos soluciones son iguales.

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (10 de Enero de 1994)

Borrador