Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (17 de Septiembre de 1993)

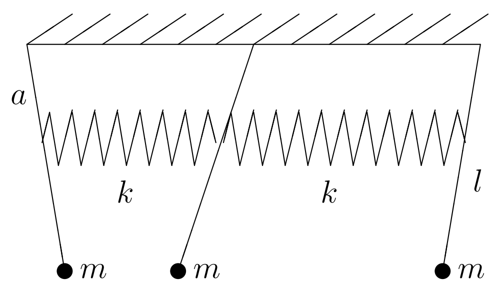
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º Tiempo: 60 min.

Un conjunto de 3 péndulos simples iguales, de longitud l y masa puntual m cada uno, oscilan en un plano vertical. Se hallan sujetos entre sí por 2 resortes iguales de constante k cada uno, en dirección horizontal y a una altura a por debajo del punto de suspensión, de forma que en la posición de equilibrio no ejercen fuerza alguna. Se pide:

a. ecuaciones del movimiento y su linealización para pequeñas oscilaciones.

b. frecuencias y modos propios de vibración del sistema.



Las expresiones de la energía cinética y potencial son

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}_1^2 + l^2\dot{\theta}_2^2 + l^2\dot{\theta}_3^2) \\
V &= \frac{1}{2}k(a\operatorname{sen}\theta_2 - a\operatorname{sen}\theta_1)^2 + \frac{1}{2}k(a\operatorname{sen}\theta_3 - a\operatorname{sen}\theta_2)^2 \\
&\quad - mgl\cos\theta_1 - mgl\cos\theta_2 - mgl\cos\theta_3
\end{aligned}
$$

donde se ha supuesto que la acción de los resortes proporcional a su elongación horizontal. La Lagrangiana queda expresada como

$$
\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \\
&\quad - \frac{1}{2}ka^2[(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1)^2 + (\operatorname{sen}\theta_3 - \operatorname{sen}\theta_2)^2] + mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3)
\end{aligned}
$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange

$$
\begin{aligned}
0 &= ml^2\ddot{\theta}_1 - ka^2(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1)\cos\theta_1 + mgl\operatorname{sen}\theta_1 \\
0 &= ml^2\ddot{\theta}_2 + ka^2(2\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_3)\cos\theta_2 + mgl\operatorname{sen}\theta_2 \\
0 &= ml^2\ddot{\theta}_3 + ka^2(\operatorname{sen}\theta_3 - \operatorname{sen}\theta_2)\cos\theta_3 + mgl\operatorname{sen}\theta_3
\end{aligned}
$$

Para pequeñas oscilaciones, las ecuaciones linealizadas son

$$\begin{aligned}
0 &= ml^2\ddot{\theta}_1 - ka^2(\theta_2 - \theta_1) + mgl\theta_1 \\
0 &= ml^2\ddot{\theta}_2 + ka^2(2\theta_2 - \theta_1 - \theta_3) + mgl\theta_2 \\
0 &= ml^2\ddot{\theta}_3 + ka^2(\theta_3 - \theta_2) + mgl\theta_3
\end{aligned}$$

o matricialmente

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

siendo

$$\{\mathbf{q}\} = \left\{\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{array}\right\}; \qquad [\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & ml^2 \end{pmatrix};$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} ka^2 + mgl & -ka^2 & 0 \\ -ka^2 & 2ka^2 + mgl & -ka^2 \\ 0 & -ka^2 & ka^2 + mgl \end{pmatrix}.$$

Las frecuencias propias y modos de vibración resultan de suponer vibraciones armónicas, $\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{a}\}\operatorname{sen}\omega t$, de donde se obtiene la ecuación homogénea

$$(-[\mathbf{M}]\omega^2 + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}\} = \{0\}. \tag{1}$$

Denominando $\omega_0^2 = k/m$; $\alpha = a/l$; $\beta^2 = g/l$, la matriz de coeficientes es

$$-[\mathbf{M}]\omega^2 + [\mathbf{K}] = ml^2 \begin{pmatrix} \alpha^2\omega_0^2 + \beta^2 - \omega^2 & -\alpha^2\omega_0^2 & 0 \\ -\alpha^2\omega_0^2 & 2\omega_0^2\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2 & -\alpha^2\omega_0^2 \\ 0 & -\alpha^2\omega_0^2 & \omega_0^2\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2 \end{pmatrix}$$

y la ecuación característica, $|-[\mathbf{M}]\omega^2 + [\mathbf{K}]| = 0$, convenientemente simplificada, resulta:

$$(\alpha^2\omega_0^2 + \beta^2 - \omega^2)[\omega^4 - (3\alpha^2\omega_0^2 + 2\beta^2)\omega^2 + (3\beta^2\alpha^2\omega_0^2 + \beta^4)] = 0.$$

Siendo inmediato obtener las soluciones para ω^2

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_1^2 = \alpha^2\omega_0^2 + \beta^2 \\ \omega_2^2 = \beta^2 \\ \omega_3^2 = 3\alpha^2\omega_0^2 + \beta^2 \end{array}\right.$$

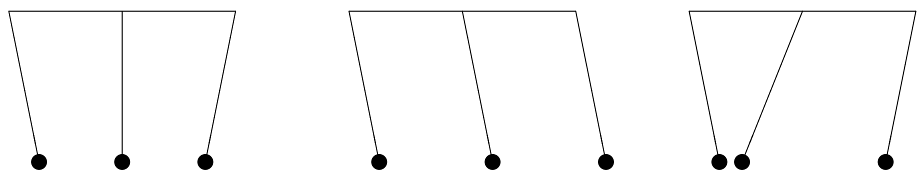
Sustituyendo los valores de ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2 en la ecuación (1) se obtienen los vectores propios correspondientes o modos normales de vibración:

$$(-[\mathbf{M}]\omega_1^2 + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}^1\} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\}$$

$$(-[\mathbf{M}]\omega_2^2 + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}^2\} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right\}$$

$$(-[\mathbf{M}]\omega_3^2 + [\mathbf{K}])\{\mathbf{a}^3\} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} a_1^3 \\ a_2^3 \\ a_3^3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right\}$$

Gráficamente, los resultados se pueden resumir de la siguiente manera:



$||\mathbf{a}^1|| = ||1, 0, -1||$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{a^2}{l^2}\frac{k}{m} + \frac{g}{l}}$

$||\mathbf{a}^2|| = ||1, 1, 1||$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$||\mathbf{a}^3|| = ||1, -2, 1||$

$\omega_3 = \sqrt{3\frac{a^2}{l^2}\frac{k}{m} + \frac{g}{l}}$