Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

EXAMEN FINAL (14 de Junio de 1993)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

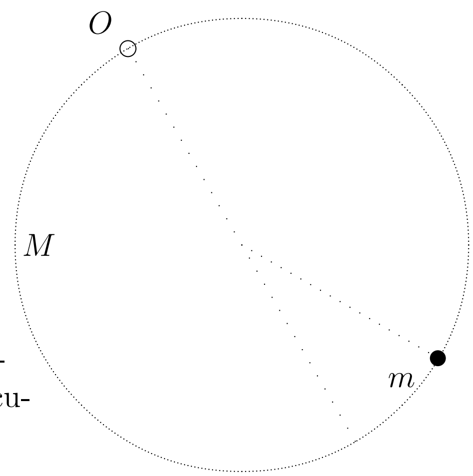
Ejercicio 5.º (1er. P. y Final) Tiempo: 60 min.

Un aro homogéneo de masa m y radio r cuelga de un punto de su perímetro fijo O, oscilando en un plano vertical. A su vez, sobre el aro está situada una partícula de masa m con ligadura bilateral, pudiendo deslizar a lo largo del mismo sin resistencias pasivas.

Se pide:

a. Ecuaciones del movimiento.

b. Calcular la reacción del aro sobre la partícula (*sugerencia:* emplear multiplicadores de Lagrange para imponer la ligadura bilateral de la partícula)



Tomamos como parámetros libres el ángulo φ girado por el aro, medido desde la posición de equilibrio, y el ángulo θ absoluto que forma el radio correspondiente a la partícula con la vertical. Con estos parámetros la Lagrangiana vale

$$L = \frac{1}{2}(2mr^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2r^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta-\varphi)) + 2mgr\cos\varphi + mgr\cos\theta$$

Derivando obtenemos las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned} 0 &= 3mr^2\ddot{\varphi} + mr^2\ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi) - mr^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}(\theta-\varphi) + 2mgr\operatorname{sen}\varphi \\ 0 &= mr^2\ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi) + mr^2\ddot{\theta} + mr^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}(\theta-\varphi) + mgr\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Para calcular la reacción, liberamos la coacción implícita del aro sobre la partícula, definiendo su distancia al centro del aro mediante el nuevo parámetro ρ, e imponiendo por otra parte la ligadura $\rho = r$ mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange. En función de los incrementos instantáneos de los parámetros, la ligadura equivale a la nueva ecuación

$$\lambda\delta\rho = 0$$

teniendo el multiplicador λ la interpretación física de una fuerza generalizada en la dirección positiva de ρ. En este caso se ve inmediatamente que corresponde a la fuerza de reacción del aro sobre la partícula.

Permitiendo variar a ρ, se obtiene la nueva Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}(2mr^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + 2r\rho\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta-\varphi) + \dot{\rho}^2 + 2r\dot{\rho}\dot{\varphi}\operatorname{sen}(\theta-\varphi)) + 2mgr\cos\varphi + mg\rho\cos\theta$$

La ecuación de Lagrange en ρ es la única que nos interesa:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\rho}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} - \underbrace{A^\rho}_{=1}\lambda = 0$$

Derivando se obtiene inmediatamente

$$F_\rho = \lambda = m\ddot\rho + mr\ddot\varphi \operatorname{sen}(\theta - \varphi) - mr\dot\varphi^2 \cos(\theta - \varphi) - m\rho\dot\theta^2 - mg\cos\theta.$$

Por último, particularizamos $\rho = r$, $\dot\rho = \ddot\rho = 0$ para imponer la ligadura, obteniendo

$$F_\rho = mr\ddot\varphi \operatorname{sen}(\theta - \varphi) - mr\dot\varphi^2 \cos(\theta - \varphi) - mr\dot\theta^2 - mg\cos\theta.$$

En esta ecuación, los sumandos tienen la siguiente interpretación física:

- $mr\ddot\varphi \operatorname{sen}(\theta - \varphi) - mr\dot\varphi^2 \cos(\theta - \varphi)$ es la fuerza de arrastre debida al movimiento del aro,
- $-mr\dot\theta^2$ es la fuerza centrípeta del aro debida al giro de la partícula por él,
- $-mg\cos\theta$ es reacción debida al peso.