

Mecánica

2.º EXAMEN PARCIAL (24 de Mayo de 1993)

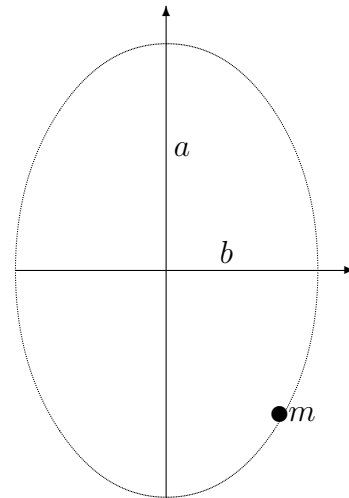
Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

Ejercicio 3.º

Tiempo: 50 min.

Una partícula de masa m se ve obligada a moverse sobre una elipse fija dentro de un plano vertical, de semiejes a (vertical) y b (horizontal), sin resistencias pasivas. Está sometida, además de la gravedad terrestre, a una fuerza atractiva hacia el eje vertical de la elipse, proporcional a la distancia al mismo con constante k .

Obtener las posiciones de equilibrio y discutir su estabilidad.



Expresamos la posición de m mediante la ecuación paramétrica de la elipse:

$$x = b \operatorname{sen} \varphi; \quad y = a \cos \varphi$$

El potencial es

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} kx^2 + mgy \\ &= \frac{1}{2} kb^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + mga \cos \varphi, \end{aligned}$$

y su derivada

$$\frac{dV}{d\varphi} = \operatorname{sen} \varphi (kb^2 \cos \varphi - mga).$$

Se obtienen las siguientes posiciones de equilibrio ($dV/d\varphi = 0$):

- $\varphi = 0$ (vértice superior de la elipse)
- $\varphi = \pi$ (vértice inferior de la elipse)
- $\cos \varphi = \frac{mga}{kb^2}$ (posiciones intermedias en la mitad superior, que por simetría se producen a ambos lados del eje vertical; sólo existirán si se verifica $kb^2 > mga$, condición de compatibilidad)

La condición de estabilidad es $d^2V/d\varphi^2 > 0$; derivando,

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} = \cos \varphi (kb^2 \cos \varphi - mga) - kb^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$$

1. $\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d^2V}{d\varphi^2} = kb^2 - mga,$
por lo que la posición será *estable* si $kb^2 > mga$, e *inestable* en caso contrario.
2. $\varphi = \pi \Rightarrow \frac{d^2V}{d\varphi^2} = kb^2 + mga > 0,$
por lo que la posición será *estable* siempre.
3. $\cos \varphi = \frac{mga}{kb^2} \Rightarrow \frac{d^2V}{d\varphi^2} = -kb^2 \operatorname{sen}^2 \varphi < 0,$
por lo que la posición será *inestable* siempre que exista.