

Mecánica – ICCP

EXAMEN PARCIAL (31 de mayo del 2012)

Apellidos

Nombre

N.º

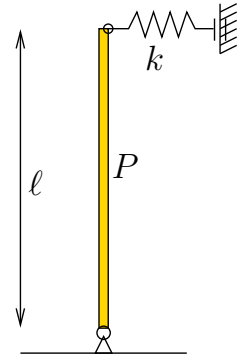
Grupo

--	--	--	--

Ejercicio 3º (puntuación: 10/30)

Tiempo: 30 min.

Un poste homogéneo y rígido de peso P y altura ℓ está colocado verticalmente, apoyado en su base mediante una articulación que permite el giro libre en un plano vertical. El poste está estabilizado mediante un dispositivo elástico equivalente a un resorte lineal de rigidez k y acción horizontal, situado en el extremo superior. Calcular el valor que debe tener la constante k para que el equilibrio sea estable.



Se trata de un sistema en el que todas las fuerzas actuantes son conservativas, por tanto se puede estudiar mediante el potencial obligando a que la posición de equilibrio corresponda a un mínimo del potencial.

Otra forma de razonar sería estudiando el momento volcador debido al peso cuando se produce una perturbación del equilibrio, que debe ser equilibrado por un momento estabilizador debido al resorte. Mediante este razonamiento se comprende inmediatamente que para la estabilidad la condición será que la rigidez del resorte sea mayor que un determinado valor mínimo.

El sistema tiene un solo grado de libertad, tomaremos para ello el ángulo θ girado por el poste. La elongación del resorte, relativa a la posición vertical de equilibrio, es $\ell \sin \theta$. Por otra parte la altura del centro de gravedad del poste es $(\ell/2) \cos \theta$, por lo que el potencial vale

$$V(\theta) = P \frac{\ell}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} k (\ell \sin \theta)^2. \quad (1)$$

Derivando esta expresión:

$$\frac{dV}{d\theta} = -P \frac{\ell}{2} \sin \theta + k \ell^2 \sin \theta \cos \theta = -P \frac{\ell}{2} \sin \theta + k \ell^2 \frac{1}{2} \sin(2\theta). \quad (2)$$

Se comprueba inmediatamente que la posición vertical del poste es efectivamente de equilibrio:

$$\left. \frac{dV}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0. \quad (3)$$

Derivando de nuevo,

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -P \frac{\ell}{2} \cos \theta + k \ell^2 \cos(2\theta). \quad (4)$$

Particularizando en la posición de equilibrio y obligando al mínimo de potencial se obtiene la condición para la estabilidad:

$$\left. \frac{d^2V}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = -P \frac{\ell}{2} + k \ell^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k > \frac{P}{2\ell}}. \quad (5)$$

