Mecánica

EXAMEN FINAL (27 de junio de 2011)

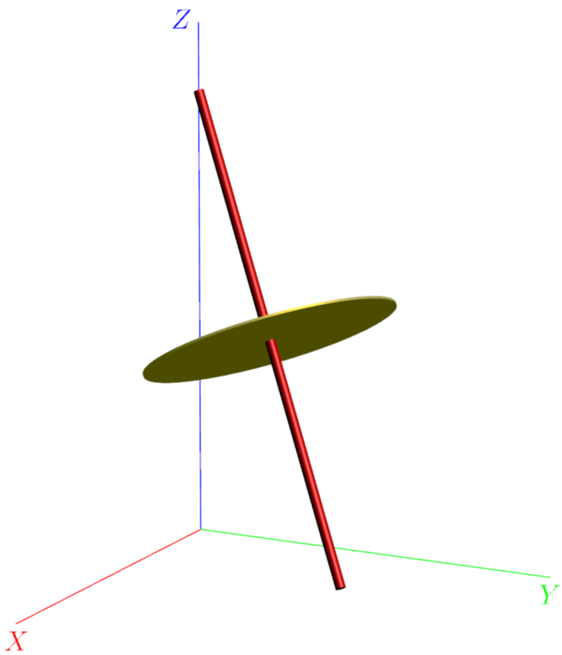
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

El sólido pesado de la figura está formado por una varilla de masa m y longitud $2R$ y un disco de masa m y radio $R/2$ unido rígida y ortogonalmente a la varilla en su punto medio. El sólido se mueve de modo que uno de sus extremos desliza por el eje vertical Z sin rozamiento, mientras que el otro extremo desliza por el plano OXY también liso.

Se pide:

1. Grados de libertad del sólido.
2. Velocidad angular en función de los grados de libertad y sus derivadas.
3. Expresión de las energías cinética y potencial.
4. Integrales primeras y ecuaciones del movimiento.



1.— El sólido definido en el enunciado tiene tres grados de libertad. Un sólido rígido tridimensional tiene 6 grados de libertad, y en este caso hay además dos ecuaciones de ligadura para el extremo de la varilla que se mueve sobre OZ (que denominaremos A), y una ecuación de ligadura para el extremo que se mueve sobre el plano OXY (que denominaremos B). Los grados de libertad que se utilizarán para resolver el ejercicio corresponden a los ángulos de Euler: el ángulo ψ girado por el sólido alrededor del eje OZ (precesión), el ángulo θ que forma la varilla con el eje OZ (nutación) y el ángulo φ girado alrededor de la varilla (rotación propia).

2.— Tomamos un triedro intermedio con origen en el centro de masas G del sólido. El versor $\boldsymbol{j}$ lleva en todo momento la dirección de máxima pendiente del plano del disco en sentido ascendente y el versor $\boldsymbol{k}$ coincide con la varilla, apuntando al extremo que se mueve sobre el eje OZ. En consecuencia, el versor $\boldsymbol{i}$ será horizontal y con el sentido adecuado para que el triedro sea dextrógiro. Llamando $\boldsymbol{K}$ al versor de OZ:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} + \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} = \dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{j} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\boldsymbol{k} \tag{1}$$

3.— La expresión de la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}2mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega} \tag{2}$$

El tensor de inercia en G se obtiene sumando los correspondientes tensores de la varilla y del disco:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}m(2R)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(2R)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4}m(\frac{R}{2})^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}m(\frac{R}{2})^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m(\frac{R}{2})^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{19}{48}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{48}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}mR^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

La velocidad de G se obtiene mediante la expresión del campo de velocidades del sólido, a partir de la velocidad del extremo A de la varilla que se mueve sobre el eje OZ:

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AG} = -2R\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{K} + (\dot{\theta}\boldsymbol{i} + \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{j} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\boldsymbol{k}) \wedge (-R)\boldsymbol{k}$$
$$= -\dot{\psi}R \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{i} + (1 - 2\operatorname{sen}^2\theta)\dot{\theta}R\boldsymbol{j} - 2\dot{\theta}R \operatorname{sen}\theta\cos\theta\boldsymbol{k} \Rightarrow v_G^2 = R^2(\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2) \quad (4)$$

Sustituyendo (1,3,4) en (2) se obtiene la expresión pedida:

$$T = \frac{115}{96}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{16}mR^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 \quad (5)$$

La expresión de la energía potencial se obtiene de manera elemental a partir de la coordenada z del centro de masas:

$$V = 2mgR\cos\theta \quad (6)$$

4.— A partir de la expresión de la función Lagrangiana $L = T - V$, como las coordenadas ψ y φ no aparecen explícitamente en L éstas son coordenadas cíclicas y dan lugar a dos integrales primeras del movimiento:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{cte} \Rightarrow \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta = C_1 \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \text{cte} \Rightarrow \frac{115}{6}\dot{\psi}\operatorname{sen}^2\theta + C_1\cos\theta = C_2 \quad (8)$$

La integral primera (7) se interpreta como la conservación de la proyección del momento cinético sobre el eje de revolución de sólido, ya que todas las fuerzas cortan a dicho eje y además el sólido tiene simetría de revolución (tensor de inercia cilíndrico). El resultado expresa la conservación de la componente de la velocidad de rotación según el eje del sólido. La integral primera (8) se interpreta como la conservación de la proyección del momento cinético sobre el eje OZ, ya que todas las fuerzas son paralelas o cortan a dicho eje.

Finalmente, como la única fuerza activa es conservativa y las reacciones no realizan trabajo, la tercera integral primera corresponde a la conservación de la energía:

$$\frac{115}{96}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{16}mR^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + 2mgR\cos\theta = E \quad (9)$$

Como el sólido tiene tres grados de libertad y hay tres integrales primeras, éstas se pueden adoptar como ecuaciones diferenciales del movimiento.