Mecánica

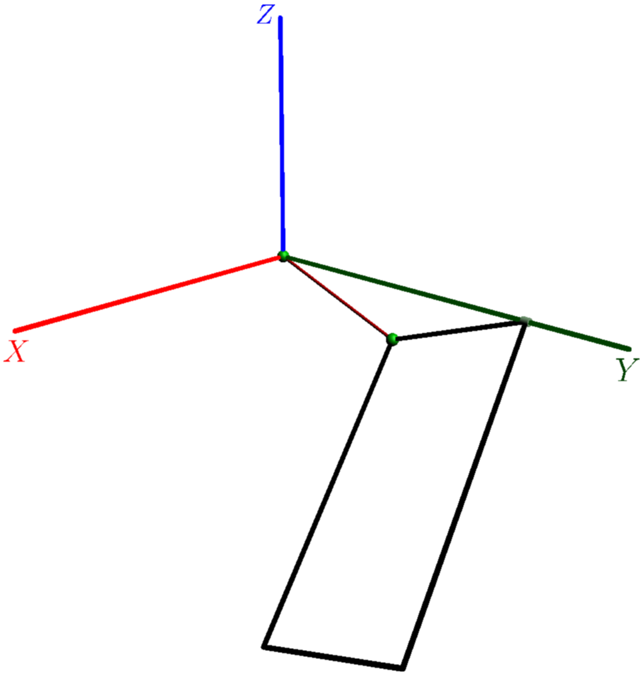
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (1 de diciembre del 2010)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

El sistema mecánico de la figura está formado por una placa pesada rectangular de masa m y lados a y $2a$, y una varilla sin masa de longitud a. La placa se mueve de manera que uno de los vértices del lado de longitud a desliza por el eje OY, mientras que el otro vértice está articulado a un extremo de la varilla. El otro extremo de la varilla está articulado en el origen de coordenadas O y la varilla está obligada a permanecer en el plano OYZ. Se pide:

1. Número de grados de libertad y coordenadas generalizadas.
2. Velocidad angular de la placa.
3. Integrales primeras.
4. Ecuaciones del movimiento.



1.- El sistema tiene dos grados de libertad. Como coordenadas generalizadas se pueden tomar, por ejemplo, el giro de la varilla alrededor del eje OX fijo, (θ), (el mismo ángulo que gira el lado AB del rectángulo) y el giro ϕ alrededor del lado menor de la placa (eje Ax), tomando el cero de ϕ cuando la placa está vertical.

2.- Utilizaremos unos ejes ligados al rectángulo, como los $Axyz$ indicados en la figura 1. También emplearemos los ejes $Ax_1y_1z_1$, estando (y_1, z_1) en el plano Axz, z_1 horizontal ey_1 en el plano OYZ. La velocidad angular se obtiene como suma de una rotación alrededor del eje X de valor θ y otra alrededor del lado pequeño del rectángulo (eje x) de valor ϕ:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\boldsymbol{I}\,, \tag{1}$$

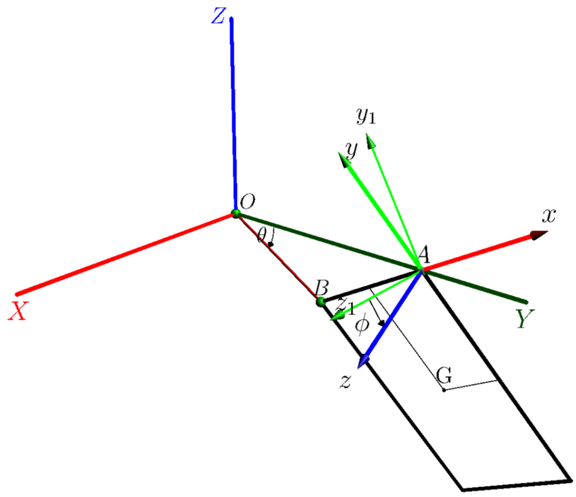


Figura 1: *Ejes*

y teniendo en cuenta que el eje X coincide con el eje z_1,

$$\boldsymbol{I} = \operatorname{sen}\phi\boldsymbol{j} + \cos\phi\boldsymbol{k} \tag{2}$$

resulta:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\operatorname{sen}\phi\boldsymbol{j} + \dot{\theta}\cos\phi\boldsymbol{k}\,. \tag{3}$$

3.- Las fuerzas que actúan sobre el sistema provienen del campo gravitatorio simplificado, por lo que derivan de un potencial. Por otro lado las ligaduras que restringen el movimiento del sistema son lisas. Esto hace que se conserve la energía:

$$T + V = \text{cte.} \tag{4}$$

La energía potencial se obtiene proyectando el segmento $\boldsymbol{r}_{AG}$ sobre el eje Z obteniéndose:

$$V = -mg\left(\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta + a\cos\phi\cos\theta\right) . \tag{5}$$

La energía cinética se obtendrá como suma de la energía cinética de traslación y de rotación:

$$T = T_t + T_r = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} . \tag{6}$$

El tensor central de inercia del rectángulo en los ejes ligados al mismo es

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}m4a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m5a^2 \end{pmatrix} . \tag{7}$$

La velocidad $\boldsymbol{v}_G$ se obtiene aplicando el campo de velocidades del sólido rígido

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_G &= \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}_{AG} \\ &= a\dot{\theta}\left(\cos\phi - \operatorname{sen}2\theta\right)\boldsymbol{i} + a\dot{\theta}\left(2\cos\phi(\operatorname{sen}\theta)^2 - \frac{1}{2}\cos\phi\right)\boldsymbol{j} \\ &\qquad + a\left(\dot{\theta}\operatorname{sen}\phi\big(-2(\operatorname{sen}\theta)^2 + \frac{1}{2}\big) - \dot{\phi}\right)\boldsymbol{k} . \end{aligned} \tag{8}$$

Operando según (6) y usando (7), (8) se obtiene la energía cinética:

$$\begin{aligned} T = \frac{ma^2}{6}\Big(&4\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2(6\operatorname{sen}\theta^2 - 6\cos\phi\operatorname{sen}2\theta - 4(\operatorname{sen}\phi)^2 + 5) \\ &+ \dot{\theta}\dot{\phi}(12\operatorname{sen}\phi(\operatorname{sen}\theta)^2 - 3\operatorname{sen}\phi)\Big) \end{aligned} \tag{9}$$

que junto con la energía potencial (5) da la integral primera de la energía (4).

4.- Como ecuaciones del movimiento se pueden considerar la constancia de la energía (4) y una de las ecuaciones de Lagrange. Utilizando la ecuación de Lagrange correspondiente a la coordenada ϕ,

$$L = T - V ; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \tag{10}$$

se obtiene:

$$8\ddot{\phi} + 3\ddot{\theta}\operatorname{sen}\phi(4(\operatorname{sen}\theta)^2 - 1) + \dot{\theta}^2(4\operatorname{sen}2\phi + 6\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}2\theta) + \frac{6g}{a}\operatorname{sen}\phi\cos\theta = 0 . \tag{11}$$

Esta ecuación junto con (4) proporciona las dos ecuaciones del movimiento necesarias.