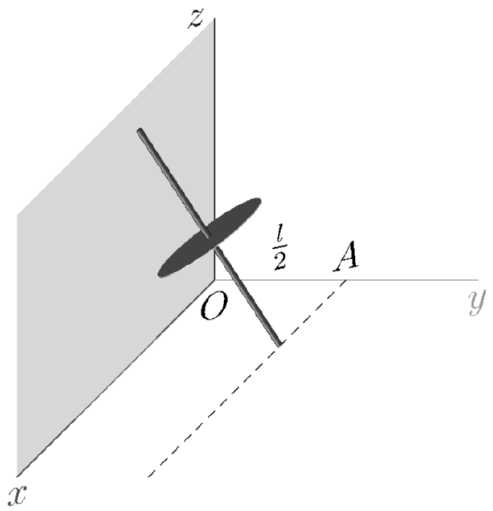
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (8 de marzo del 2010)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

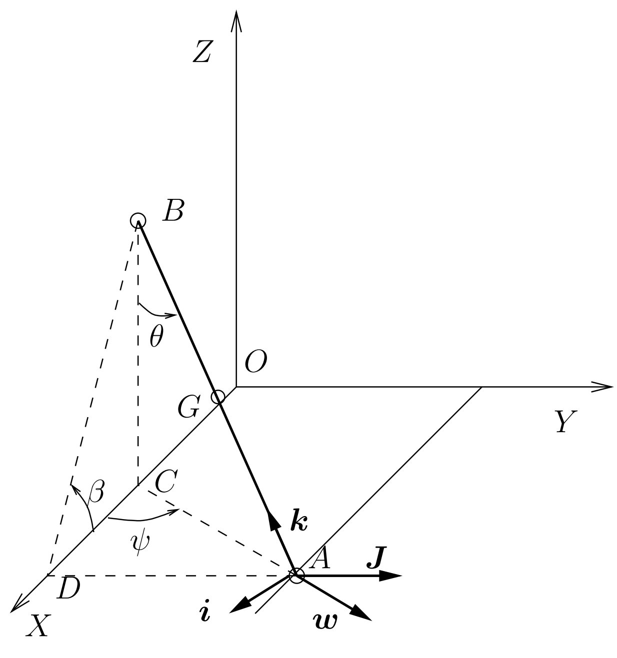
Ejercicio 2º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

El sistema mecánico de la figura está formado por un disco homogéneo pesado de masa m y radio r, y una varilla de masa m y longitud ℓ que está rígidamente unida al disco en su centro y es perpendicular al plano del mismo. El sólido se mueve de modo que uno de los extremos de la varilla recorre la recta $y = \ell/2$, $z = 0$ y el otro extremo está obligado a permanecer en el plano Oxz. Se pide:



1. Número de grados de libertad y coordenadas generalizadas.
2. Energía cinética y potencial.
3. Integrales primeras y ecuaciones del movimiento.
4. Reacciones sobre la varilla en la recta y en el plano.

1.— La posición del sólido se define en primer lugar por una traslación en dirección X que caracterizamos por la coordenada del centro G de la varilla, X_G. Fijada esta coordenada la posición de la varilla se fija mediante el giro β según la dirección de AY (versor $\boldsymbol{J}$). Por último, una rotación adicional ϕ alrededor del eje AB (versor $\boldsymbol{k}$). Es decir, el sistema tiene tres grados de libertad, que denominaremos (X_G, β, ϕ). En función de estas coordenadas la posición y velocidad del centro de masas son



$$\boldsymbol{r}_G = X_G\,\boldsymbol{I} + \frac{\ell}{4}\boldsymbol{J} + \ell\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen}\beta\,\boldsymbol{K}\,; \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{v}_G = \dot{X}_G\,\boldsymbol{I} + \ell\frac{\sqrt{3}}{4}\dot{\beta}\cos\beta\,\boldsymbol{K}\,. \qquad (2)$$

Por otra parte, la velocidad de rotación es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\beta}\,\boldsymbol{J} + \dot{\phi}\,\boldsymbol{k}\,. \qquad (3)$$

2.— Consideramos los ángulos auxiliares ψ y θ de la figura, relacionados con el grado de libertad β mediante las expresiones:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\sqrt{1+3\cos^2\beta}\,; \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\beta\,; \quad \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+3\cos^2\beta}}{\operatorname{sen}\beta} \qquad (4)$$

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{1}{\sqrt{1+3\cos^2\beta}}\,; \quad \cos\psi = \frac{\sqrt{3}\cos\beta}{\sqrt{1+3\cos^2\beta}}\,; \quad \tan\psi = \frac{1}{\sqrt{3}\cos\beta}\,. \qquad (5)$$

Consideramos un triedro móvil $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ con $\boldsymbol{i}$ horizontal en el disco, $\boldsymbol{k}$ según AB y $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{i}$ (triedro intermedio). Teniendo en cuenta $\boldsymbol{J} = -\cos\psi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\,\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}$ y las expresiones (4), (5), la velocidad angular se puede escribir también como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= -\dot\beta\cos\psi\,\boldsymbol{i} + \dot\beta\operatorname{sen}\psi\cos\theta\,\boldsymbol{j} + (\dot\phi - \dot\beta\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta)\boldsymbol{k} \\ &= -\dot\beta\frac{\sqrt{3}\cos\beta}{\sqrt{1+3\cos^2\beta}}\boldsymbol{i} + \dot\beta\frac{(\sqrt{3}/2)\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{1+3\cos^2\beta}}\boldsymbol{j} + (\dot\phi - \dot\beta/2)\boldsymbol{k}\,.\end{aligned} \tag{6}$$

El triedro intermedio considerado es principal de inercia, con los momentos

$$A = B = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{4}mr^2\,; \quad C = \frac{1}{2}mr^2\,. \tag{7}$$

La energía cinética se obtiene como

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}2mv_G^2 \\ &= \frac{3}{8}A\dot\beta^2 + \frac{1}{2}C(\dot\phi-\dot\beta/2)^2 + m\left(\dot X_G^2 + \frac{3}{16}\ell^2\dot\beta^2\cos^2\beta\right)\,.\end{aligned} \tag{8}$$

La energía potencial vale

$$V = 2mgZ_G = mg\ell\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\beta\,. \tag{9}$$

3.— Una integral primera obvia se refiere a la cantidad de movimiento del sólido según X que se conserva debido a la ausencia de fuerzas aplicadas en esta dirección:

$$2m\dot X_G = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad \dot X_G = \text{cte.} \tag{10}$$

Por otra parte, el momento de las fuerzas respecto del eje AB es nulo, siendo además este eje de revolución, por lo que el momento cinético respecto del mismo se conserva:

$$C(\dot\phi - \dot\beta/2) = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad r = \dot\phi - \dot\beta/2 = \text{cte.} \tag{11}$$

Por último, las fuerzas son conservativas, por lo que se conserva la energía

$$E = T + V = \frac{3}{8}A\dot\beta^2 + \frac{1}{2}Cr^2 + m\left(\dot X_G^2 + \frac{3}{16}\ell^2\dot\beta^2\cos^2\beta\right) + mg\ell\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\beta\,. \tag{12}$$

4.— Las reacciones son R_{YB} en B y (R_{YA}, R_{ZA}) en A. Expresando la ecuación dinámica en dirección vertical,

$$R_{ZA} = 2mg + 2m\ddot Z_G = 2mg + m\ell\frac{\sqrt{3}}{2}(\ddot\beta\cos\beta - \dot\beta^2\operatorname{sen}\beta)\,. \tag{13}$$

En dirección Y se obtiene $R_{YB} = -R_{YA}$, las reacciones constituyen un par de fuerzas. El momento en G vale

$$\boldsymbol{M}_G = -\ell R_{YA}\,\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{J} - \frac{\ell}{2}R_{ZA}\,\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{K} = \ell R_{YA}(\operatorname{sen}\psi\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\psi\,\boldsymbol{j}) + \frac{\ell}{2}R_{ZA}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i}\,. \tag{14}$$

Desarrollando las ecuaciones de Euler en el triedro intermedio,

$$M_x = \ell R_{YA}\operatorname{sen}\psi\cos\theta + \frac{\ell}{2}R_{ZA}\operatorname{sen}\theta = A\ddot\theta - (A-C)\dot\psi\operatorname{sen}\theta r + A\dot\psi\dot\varphi\operatorname{sen}\theta \tag{15}$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores de (ψ,θ) de (4), (5) y $\dot\varphi = r - \dot\psi\cos\theta$ se obtiene la reacción R_{YA}.