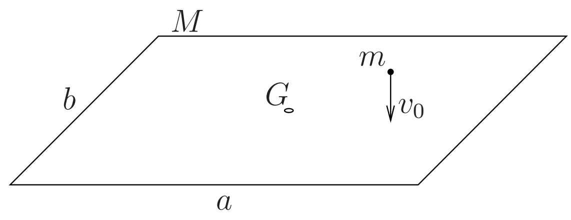
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (27 de mayo del 2009)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Una placa rectangular homogénea y lisa de lados a y b y masa M está articulada en su centro de masa G a un punto fijo y se encuentra en reposo cuando impacta sobre ella perpendicularmente una partícula de masa m con velocidad v_0, con un coeficiente de restitución e. Se pide, para el instante inmediatamente posterior al impacto:



1. Obtener el lugar geométrico de los puntos de impacto sobre la placa que hacen que ésta gire con una velocidad de rotación que forma 45° con cualquiera de los lados;

Suponiendo que la partícula impacta en un punto de la placa que pertenece al lugar calculado anteriormente y que se encuentra situado a una distancia $b/2$ de G:

2. Obtener el módulo de la velocidad de rotación de la placa y la velocidad de la partícula;

3. Obtener la impulsión reactiva en G y la que se produce entre placa y partícula.

1.— Consideramos unos ejes de coordenadas $Gxyz$ siendo Gz normal a la placa en sentido contrario a la velocidad v_0, Gx paralelo al lado b y Gy paralelo al lado a. El impacto de la partícula produce una impulsión $-P\,\boldsymbol{k}$ normal a la placa, en un punto (x, y) de la misma.

La primera consideración es que esta impulsión no produce rotación alrededor de Gz, es decir $\Omega_z = 0$. En efecto, el momento de la impulsión es $\boldsymbol{M}_G = -Py\,\boldsymbol{i} + Px\,\boldsymbol{j}$. El tensor de inercia es $\boldsymbol{I}_G = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$, por lo que el momento cinético después de la impulsión es

$$\boldsymbol{H}_G = \frac{M}{12}(a^2\Omega_x\,\boldsymbol{i} + b^2\Omega_y\,\boldsymbol{j} + (a^2+b^2)\Omega_z\,\boldsymbol{k}) = -Py\,\boldsymbol{i} + Px\,\boldsymbol{j}\,, \tag{1}$$

y por tanto $\Omega_z = 0$ como dijimos. Por otra parte, identificando las componentes x e y:

$$\Omega_x = -\frac{12}{Ma^2}Py\,; \quad \Omega_y = \frac{12}{Mb^2}Px\,, \tag{2}$$

e igualando ambas (en valor absoluto para que forme los ángulos ±45°) se obtiene

$$\boxed{\frac{y}{a^2} \pm \frac{x}{b^2} = 0\,,} \tag{3}$$

que son sendas rectas por G de pendientes $\pm a^2/b^2$.

2.— Obtendremos en primer lugar las coordenadas del punto de impacto. La condición de distancia $b/2$ se puede desarrollar como

$$\frac{b^2}{4} = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{a^4}{b^4}x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{b}{2}\frac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}\,, \quad y = \pm\frac{b}{2}\frac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}\,. \tag{4}$$

Sustituyendo estas coordenadas en (2) obtenemos las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\Omega_x = -\frac{6Pb}{M\sqrt{a^4+b^4}} = \pm\Omega_y\,, \tag{5}$$

por tanto el módulo de la velocidad angular es

$$\Omega = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2} = \frac{6\sqrt{2}Pb}{M\sqrt{a^4+b^4}}\,. \tag{6}$$

Para calcular el valor de P debemos desarrollar otras dos ecuaciones, el balance de cantidad de movimiento y la del coeficiente de restitución. Denominando v_1 a la velocidad de la partícula posterior a la impulsión, positiva en sentido opuesto a v_0,

$$-mv_0 + P = mv_1\,. \tag{7}$$

Por otra parte, el coeficiente de restitución, empleando los valores de (2), se expresa como

$$ev_0 = v_1 - \Omega_x y + \Omega_y x = \frac{P}{m} - v_0 + 12\frac{P}{M}\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}\right)\,. \tag{8}$$

Sustituyendo las coordenadas (4) y despejando,

$$\boxed{P = \frac{Mmv_0(a^4+b^4)(1+e)}{M(a^4+b^4) + 3mb^2(a^2+b^2)}\,.} \tag{9}$$

Finalmente, sustituyendo este valor de P en (6) se obtiene

$$\boxed{\Omega = \frac{6\sqrt{2}mbv_0\sqrt{a^4+b^4}(1+e)}{M(a^4+b^4) + 3mb^2(a^2+b^2)}\,.} \tag{10}$$

3.— Tanto la impulsión de la placa sobre la partícula como la impulsión reactiva en G son $P\,\boldsymbol{k}$, con el valor ya calculado en (9).