

# Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (3 de julio del 2008)

Apellidos

Nombre

N.º

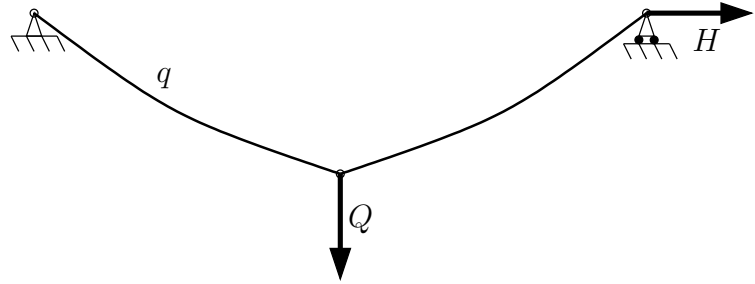
Grupo

--	--	--

Ejercicio 4.º (puntuación 10/45)

Tiempo: 60 min.

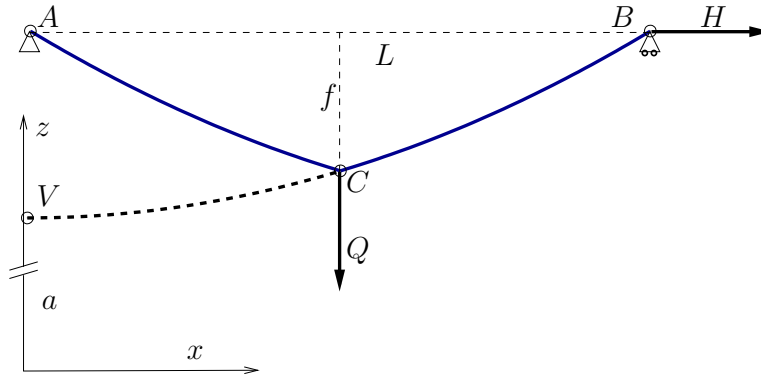
Se considera un cable flexible y uniforme de peso unitario  $q$  y longitud  $S$ , anclado entre dos puntos  $A$  y  $B$  a igual altura. El cable soporta por medio de una argolla lisa un peso  $Q = qS$ . El extremo  $B$  puede moverse horizontalmente, actuando sobre el mismo una fuerza horizontal  $H = 5qS$ . Se pide:



1. Obtener la configuración de equilibrio del cable, calculando la luz  $L$  y la flecha  $f$  en función de  $S$ .
2. Calcular la rigidez del sistema en relación con la luz, es decir  $K = dH/dL$ , para la configuración de equilibrio dada.

★

1.— El peso  $Q$  se sitúa en el centro  $C$  del cable, que formará dos ramas simétricas de catenaria,  $CB$  y  $CA$ . Considerando la rama  $CB$ , los extremos estarán situados en las abscisas  $x_C$  y  $x_B$  desde el vértice de la catenaria.



Dado que la tensión vertical en  $C$  en la rama  $CB$  por simetría es  $Q/2$ ,

$$qa \operatorname{senh} \left( \frac{x_C}{a} \right) = \frac{Q}{2}. \quad (1)$$

Por otra parte, la longitud de cable en este tramo es:

$$a \operatorname{senh} \left( \frac{x_B}{a} \right) - a \operatorname{senh} \left( \frac{x_C}{a} \right) = \frac{S}{2}. \quad (2)$$

Teniendo en cuenta los datos del problema, de la ecuación (1) se deduce

$$x_C = 5S \operatorname{argsenh} \left( \frac{1}{10} \right) = 0,49917S, \quad (3)$$

y de la ecuación (2)

$$x_B = 5S \operatorname{argsenh} \left( \frac{1}{5} \right) = 0,99345S. \quad (4)$$

De esta forma, la luz vale

$$L = 2(x_B - x_C) = 10S \left[ \operatorname{argsenh} \left( \frac{1}{5} \right) - \operatorname{argsenh} \left( \frac{1}{10} \right) \right] = 0,98856S. \quad (5)$$

Teniendo en cuenta los valores de  $x_C$  y  $x_B$  de (3) y (4) la flecha se calcula como

$$f = a \cosh \left( \frac{x_B}{a} \right) - a \cosh \left( \frac{x_C}{a} \right) = 5S \left[ \sqrt{\left( \frac{1}{5} \right)^2 + 1} - \sqrt{\left( \frac{1}{10} \right)^2 + 1} \right] = 0,074082S. \quad (6)$$

**2.**— Un incremento de la fuerza  $H$  conlleva una variación de  $a = H/q$  y producirá un aumento de la luz  $L$ . Empleando las ecuaciones (1) y (2), la expresión general de  $L$  es

$$L = 2a \left[ \operatorname{argsenh} \left( \frac{S}{a} \right) - \operatorname{argsenh} \left( \frac{S}{2a} \right) \right]. \quad (7)$$

Teniendo en cuenta esta relación se puede obtener la rigidez pedida como

$$\begin{aligned} K &= \frac{dH}{dL} = q \frac{da}{dL} = \frac{q}{dL/da} \\ &= \frac{q/2}{\left[ \operatorname{argsenh}(S/a) - S/\sqrt{a^2 + S^2} \right] - \left[ \operatorname{argsenh}(S/(2a)) - S/\sqrt{4a^2 + S^2} \right]}. \end{aligned} \quad (8)$$

Particularizando para la configuración dada,  $a = 5S$ , resulta el valor

$$K = 222,85q. \quad (9)$$