Mecánica

EXAMEN FINAL ORDINARIO (22 de junio del 2007)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja*. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Expresar las ecuaciones que permiten determinar completamente el campo de velocidades de un sólido rígido inmediatamente después de recibir un conjunto de impulsiones externas simultáneas. *Demostrar* que, en este caso, es posible plantear la expresión estándar del principio del momento cinético en cualquier punto. *Aplicación:* una varilla rígida de longitud l y masa m en reposo recibe una impulsión de magnitud P muy cerca de uno de sus extremos y en dirección perpendicular a la propia varilla. Determinar el campo de velocidades después planteando el momento cinético en el extremo que recibe la impulsión, comprobando que coincide con lo que se obtendría planteándolo en otro punto. (5 ptos.)

Conocido el campo de velocidades de un sólido inmediatamente antes de recibir un conjunto de impulsiones externas que denominaremos $\sum_i \boldsymbol{I}_i^{\text{ext}}$, las ecuaciones que permiten determinar el campo de velocidades inmediatamente después son el balance de la cantidad de movimiento:

$$\sum_i \boldsymbol{I}_i^{\text{ext}} = M\Delta\boldsymbol{v}_G \tag{1}$$

y el balance del momento cinético en el centro de masas del sólido:

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{I}_i^{\text{ext}} = \boldsymbol{I}_G\Delta\boldsymbol{\Omega} \tag{2}$$

La seis ecuaciones escalares (1) y (2) permiten obtener las componentes de $\boldsymbol{v}_G$ y $\boldsymbol{\Omega}$, después de la impulsión.

El balance del momento cinético se puede plantear en un punto cualquiera Q, ya que en la expresión del teorema del momento cinético en dicho punto Q:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_Q}{dt} = \boldsymbol{M}_Q - M\boldsymbol{v}_Q \wedge \boldsymbol{v}_G \tag{3}$$

el término adicional $M\boldsymbol{v}_Q \wedge \boldsymbol{v}_G$ está acotado, al estarlo las velocidades de los puntos G y Q, y se puede englobar por tanto dentro de las fuerzas ordinarias, cuyos efectos de cambio de movimiento durante la percusión se desprecian por ser el intervalo de actuación infinitesimal.

Aplicación: Llamando Q al extremo de la varilla en que se aplica la impulsión, v_Q a la velocidad de dicho punto (perpendicular a la varilla) y Ω a la velocidad angular (perpendicular al plano que definen la varilla y la impulsión), del balance de la cantidad de movimiento resulta:

$$P = mv_G \quad \Rightarrow \quad P = m(v_Q - \Omega l/2) \tag{4}$$

y del balance del momento cinético:

$$H_Q = 0 \quad \Rightarrow 0 = -1/3ml^2\Omega + mv_Q l/2 \tag{5}$$

resultando $\Omega = 6P/ml$ y $v_Q = 4P/m$. Planteándolo en G resulta el mismo campo de velocidades, con igual valor de Ω y $v_G = P/m$.

Deducir las expresiones de las reacciones que se producen en los apoyos de un sólido con tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$ que gira alrededor de un eje fijo OA con velocidad y aceleración angular $\boldsymbol{\Omega}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ conocidas. Particularizar después al caso en que el eje fijo coincida con un eje principal de inercia del sólido. *Aplicación:* se considera una placa plana pesada cuadrada $OBAC$ de lado a y peso P que se pone a girar alrededor de una de sus diagonales OA. Calcular las reacciones en los apoyos O y A si la diagonal se mantiene fija formando 45° con un plano horizontal fijo. (5 ptos.)

Suponemos que el eje fijo, con versor de dirección $\boldsymbol{e}$, se materializa mediante un punto fijo O y otro punto A que pueda deslizar según el eje OA pero no en dirección normal a él. El momento de las fuerzas en O es el de las fuerzas exteriores activas, más el de la reacción en A:

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{act}} + \boldsymbol{OA} \wedge \boldsymbol{R}_A = \boldsymbol{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \tag{6}$$

donde $\boldsymbol{OA} = d\boldsymbol{e}$ y al ser $\boldsymbol{e}$ fijo: $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{e}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\Omega}\boldsymbol{e}$.

Para que exista solución, la condición de compatibilidad exige que $\boldsymbol{e}$ sea normal al término independiente:

$$\boldsymbol{e} \cdot \left[\boldsymbol{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{M}_O^{\text{act}}\right] = I_e \dot{\Omega} - M_e = 0 \tag{7}$$

condición que efectivamente se cumple pues corresponde a la ecuación del movimiento de un sólido con un eje fijo. Despejando $\boldsymbol{R}_A$:

$$\boldsymbol{R}_A = \frac{\left[\dot{\Omega}\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{e} + \Omega^2 \boldsymbol{e} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{e}) - \boldsymbol{M}_O^{\text{act}}\right] \wedge \boldsymbol{e}}{d} \tag{8}$$

En el caso en que $\boldsymbol{e}$ es un eje principal ($\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{e} = I_e \boldsymbol{e}$), la expresión anterior resulta:

$$\boldsymbol{R}_A = \frac{\boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{M}_O^{\text{act}}}{d} \tag{9}$$

Una vez calculada $\boldsymbol{R}_A$, la reacción en el otro punto, $\boldsymbol{R}_O$, se calcula mediante el balance de la cantidad de movimiento:

$$\boldsymbol{R}_O = M\boldsymbol{a}_G - \boldsymbol{F}^{\text{act}} - \boldsymbol{R}_A \tag{10}$$

Aplicación: La diagonal del cuadrado es una dirección principal por lo que $\boldsymbol{R}_A$ la obtenemos a partir de (9). Consideramos el plano vertical que contiene a la diagonal del cuadrado, con los versores $\boldsymbol{i}$ horizontal y $\boldsymbol{k}$ vertical ascendente. Sustituyendo $\boldsymbol{e} = \sqrt{2}/2(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{M}_O^{\text{act}} = Pa/2\boldsymbol{j}$ y $d = \sqrt{2}a$ en (9), resulta:

$$\boldsymbol{R}_A = \frac{P}{4}(-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}) \tag{11}$$

Sustituyendo en (10) este resultado, junto con $\boldsymbol{F}^{\text{act}} = -P\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{0}$, se obtiene:

$$\boldsymbol{R}_O = \frac{P}{4}(\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}) \tag{12}$$

Obsérvese que al ser nula la aceleración del centro de masas del cuadrado y ser su diagonal un eje principal de inercia, las reacciones en los apoyos coinciden con las que se obtendrían en un cálculo estático.