Mecánica

EXAMEN FINAL (10 de junio del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 5/45) Tiempo: 25 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Enunciar el concepto de coeficiente de restitución en la dinámica impulsiva. *Deducir* la expresión que relaciona la variación de energía en un choque entre dos sólidos con dicho coeficiente, en función de la impulsión y de la velocidad relativa. Aplicación: se desea *calcular* el coeficiente de restitución del choque entre una partícula y un sólido general de masa M. El sólido está inicialmente en reposo y la partícula incide perpendicularmente al mismo con una velocidad v_0 dada. Además, del movimiento resultante inmediatamente después del choque se conocen dos magnitudes: la variación total de energía $\Delta T < 0$, y la velocidad del centro de masas del sólido $v \neq 0$. (5 ptos.)

Consideramos dos sólidos S_I y S_{II} que chocan en los puntos $P \in S_I$ y $Q \in S_{II}$, con velocidades antes y después del choque $(\boldsymbol{v}_{1,P}, \boldsymbol{v}_{2,P})$ y $(\boldsymbol{v}_{1,Q}, \boldsymbol{v}_{2,Q})$. Las velocidades relativas antes y después son $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_{1,P} - \boldsymbol{v}_{1,Q}$, $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_{2,P} - \boldsymbol{v}_{2,Q}$. Se considera que la impulsión tiene lugar según la dirección unitaria $\boldsymbol{d}$. El coeficiente de restitución se define como *el cociente cambiado de signo de las velocidades relativas según la impulsión después y antes de la misma:*

$$e \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{d}}{\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{d}}. \tag{1}$$

Para establecer la relación con la variación de energía tenemos en cuenta primero que para una partícula que sufra una impulsión $\boldsymbol{I}$ es $\Delta T = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1) = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) \cdot (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = \frac{1}{2}\boldsymbol{I} \cdot (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1)$. Para un sistema de partículas es necesario sumar las impulsiones de todas las partículas, incluyendo las debidas a ligaduras internas como los sólidos rígidos. Sin embargo, las impulsiones debidas a vínculos permanentes no realizan trabajo, ya que para cada pareja de partículas ligadas de esta manera hay un par de impulsiones $(+\boldsymbol{I}, -\boldsymbol{I})$ cuyo efecto neto según la expresión anterior es nulo. Por tanto sólo hay que considerar las impulsiones exteriores no debidas a vínculos permanentes. Cuando chocan los dos sólidos S_I y S_{II} las variaciones respectivas de energía son:

$$\Delta T_I = \frac{1}{2}\boldsymbol{I} \cdot (\boldsymbol{v}_{2,P} + \boldsymbol{v}_{1,P}); \quad \Delta T_{II} = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{I}) \cdot (\boldsymbol{v}_{2,Q} + \boldsymbol{v}_{1,Q}). \tag{2}$$

Sumando ambas contribuciones, $\Delta T = \frac{1}{2}\boldsymbol{I} \cdot [(\boldsymbol{v}_{1,P} - \boldsymbol{v}_{1,Q}) + (\boldsymbol{v}_{2,P} - \boldsymbol{v}_{2,Q})]$. Si la impulsión es lisa lleva la dirección de la normal común, $\boldsymbol{d}$. Teniendo en cuenta la definición del coeficiente de restitución y de las velocidades relativas,

$$\Delta T = \frac{1}{2}(I\boldsymbol{d}) \cdot (\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2) = \frac{1}{2}I(\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{d})(1-e) = \frac{1}{2}\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{w}_1(1-e). \tag{3}$$

Aplicación: en este caso, la impulsión sobre el sólido vale $I = Mv$. La dirección de esta coincide con la de la velocidad inicial de la partícula y la normal en el punto de impacto, al ser el choque liso y normal. La velocidad relativa (inicial) del punto del sólido respecto a la partícula es $w_1 = -v_0$. Por tanto, sustituyendo en (3) se obtiene

$$\Delta T = \frac{1}{2}(Mv)(-v_0)(1-e) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 1 + \frac{\Delta T}{\frac{1}{2}Mvv_0}}. \tag{4}$$

(Al ser necesariamente $\Delta T \leq 0$ resulta $e \leq 1$ como cabe esperar.)