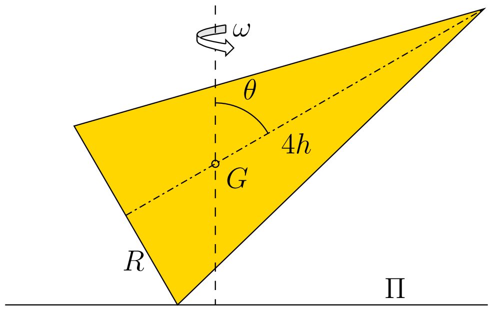
Mecánica

EXAMEN PARCIAL (1 de abril del 2006)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Se considera un cono recto de revolución de masa M, radio de la base R y altura $4h$ en contacto con un plano Π a través del perímetro de su base, con un movimiento de rodadura sin deslizamiento, como se muestra en la figura.



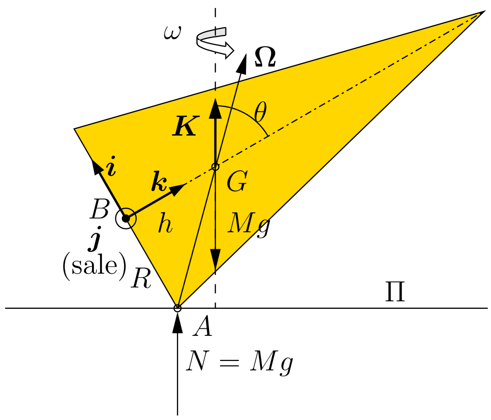
Sabiendo que el movimiento es tal que el C.D.M. G permanece quieto, siendo θ el ángulo que forma el eje del cono con la vertical, calcular la velocidad de rotación ω del eje del cono alrededor de la vertical para que dicho movimiento sea posible, expresándola en función de h, R y θ.

Nota: Los momentos centrales principales de inercia para un cono de masa M, radio R y altura H son $I_1 = (3/80)M(4R^2 + H^2), I_2 = (3/10)MR^2$.

⋆

El movimiento descrito exige que el ángulo θ sea constante. Igualmente la velocidad de precesión ω debe ser constante, cuestión que se deduce inmediatamente de la conservación de la energía. Se trata por tanto de un movimiento uniforme.

Para describir el movimiento emplearemos el triedro $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ dibujado en la figura. La dirección $\boldsymbol{i}$ es la de máxima pendiente de la base, por tanto el triedro no acompaña al cono en su rotación propia. Por una parte podemos interpretar la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ del cono como una precesión ω y una rotación propia, cuyas componentes en este triedro son:



$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\,\boldsymbol{K} + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{k} = \omega \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i} + (\dot{\varphi} + \omega\cos\theta)\boldsymbol{k}\,.$$

Por otra parte, esta rotación instantánea del cono pasa por el punto de contacto A y por el centro de masas G del cono, ya que ambos tienen velocidad nula en cada instante. Por geometría de masas sabemos que la distancia del centro de la base B a G es h (cuarta parte de la altura). Por tanto la relación que se establece entre las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ conduce a

$$\Omega_z = \frac{h}{R}\Omega_x = \frac{h}{R}\omega\operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \omega\operatorname{sen}\theta\left(\boldsymbol{i} + \frac{h}{R}\boldsymbol{k}\right)\,.$$

El vector $\boldsymbol{\Omega}$ se mantiene en el plano vertical móvil que contiene al eje del cono y sus componentes son constantes en el triedro intermedio descrito. El momento cinético vale $\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} = A\Omega_x\,\boldsymbol{i} + C\Omega_z\,\boldsymbol{k}$ (siendo A, C los momentos principales de inercia) y también tiene componentes constantes en esta referencia, que gira con velocidad $\omega\,\boldsymbol{K}$. Por tanto, la ecuación dinámica de balance de momento cinético conduce a:

$$\boldsymbol{M}_G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}) = \omega\,\boldsymbol{K}\wedge(\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}) = \left(A\omega^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - C\omega^2\operatorname{sen}^2\theta\frac{h}{R}\right)\boldsymbol{j}\,.$$

El momento $\boldsymbol{M}_G$ está producido por la reacción $N = Mg$ en A. Desarrollando los términos de la ecuación anterior resulta finalmente

$$\boxed{\omega^2 = \frac{20}{3}\frac{g}{R}\frac{\cos\theta - (h/R)\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\left[(1+4h^2/R^2)\cos\theta - 2(h/R)\operatorname{sen}\theta\right]}\,.}$$