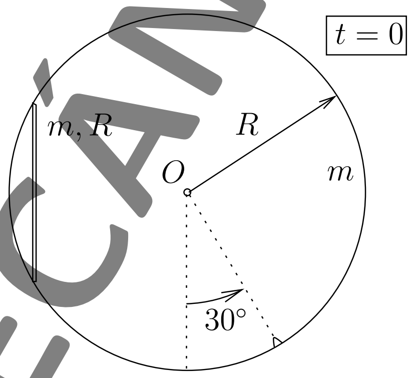
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (6 de septiembre de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Una varilla pesada de masa m y longitud R se mueve de forma que sus extremos pueden deslizar con ligadura bilateral lisa sobre un aro vertical de radio R y masa m. El aro está siempre contenido en un plano vertical fijo, y su único movimiento permitido es el giro alrededor de su centro fijo O.



En el instante inicial la varilla se encuentra en posición vertical, y tanto ésta como el aro se encuentran en reposo. Existe un pequeño resalte en el aro, situado a 30° respecto de la vertical (ver figura) que obstaculiza el movimiento de la varilla cuando ésta llega a dicho punto al caer desde la configuración inicial descrita anteriormente. El coeficiente de restitución del impacto que se produce entre la varilla y el resalte del aro tiene un valor e.

Se pide

1. Determinar el campo de velocidades de la varilla y el aro después del impacto de aquella con el resalte;
2. Expresiones de las componentes tangencial y normal de la impulsión sobre el extremo de la varilla que impacta con el resalte del aro;
3. Expresión de la impulsión reactiva sobre el centro O del aro.

⋆

1. El movimiento del sistema tiene dos fases:

- Caída de la varilla desde la posición inicial. El aro no gira durante esta fase, puesto que el contacto con la varilla es liso y no se transmite reacción tangencial.
  Teniendo además en cuenta la posición del resalte, es sencillo comprobar que la varilla se encuentra horizontal cuando se produce el impacto. La velocidad de rotación de la varilla en ese instante (ω_0) puede calcularse observando que su energía total se conserva:

$$0 = -mgR\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}I_O\omega_0^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{6g\sqrt{3}}{5R}}\ ,$$

  donde se ha tenido en cuenta que el momento de inercia de la varilla es $I_O = (5/6)mR^2$.

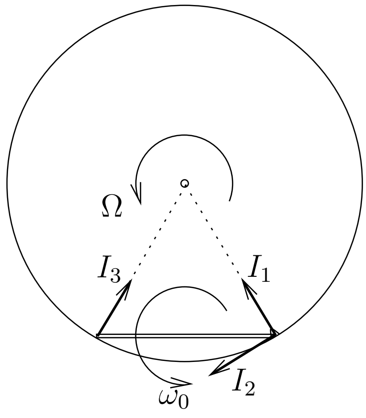


Figura 1: *Configuración en el momento del impacto*

- Impacto de la varilla contra el resalte. La varilla experimenta impulsiones I_1, I_2, I_3 sobre sus extremos (ver Figura (1), y el aro las correspondientes impulsiones reactivas, tanto en su periferia como en su centro O.

El campo de velocidades de cada sólido inmediatamente después del impacto queda determinado por sus respectivas velocidades angulares Ω y ω. Para obtenerlas, planteamos en primer lugar la ecuación de balance de momento cinético al sistema aro+varilla en O, de forma que no aparece ninguna impulsión externa:

$$0 = mR^2\Omega + \frac{5}{6}mR^2(\omega - \omega_0)\,, \tag{1}$$

La otra ecuación la proporciona el coeficiente de restitución del impacto entre la varilla y el aro. Para expresar esta ecuación es preciso proyectar según la dirección de la impulsión en el resalte que a priori no es conocida. Sin embargo, como las velocidades de los puntos de contacto en ambos sólidos tienen la misma dirección, la dirección en que se produce la impulsión es irrelevante, y en consecuencia no es necesario introducir incógnitas adicionales. Para comprobar esta afirmación basta suponer que la impulsión total I forma un ángulo α (desconocido) con la tangente en el extremo donde se produce el impacto. La expresión que se obtiene para el coeficiente de restitución resulta:

$$e = -\frac{\omega R\cos\alpha - \Omega R\cos\alpha}{\omega_0 R\cos\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad e\omega_0 = \Omega - \omega\,. \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) permiten obtener finalmente las expresiones para Ω y ω:

$$\Omega = \frac{5}{11}\omega_0(1+e) \quad , \qquad \omega = \frac{6}{11}\omega_0\left(\frac{5}{6} - e\right)\,. \tag{3}$$

2. El balance de momento cinético en O de la varilla proporciona directamente el valor de la impulsión tangencial:

$$-I_2 R = \frac{5}{6}mR^2(\omega - \omega_0) \qquad \Longrightarrow \qquad I_2 = \frac{5}{11}mR\omega_0(1+e)\,. \tag{4}$$

Para obtener la impulsión normal I_1 planteamos el balance de cantidad de movimiento de la varilla en dirección tangencial y normal al aro en el punto de impacto:

$$\text{Tangencial} \qquad -I_2 + I_3\frac{\sqrt{3}}{2} = mR\frac{\sqrt{3}}{2}(\omega - \omega_0)\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \tag{5}$$

$$\text{Normal} \qquad I_1 + I_3\frac{1}{2} = -mR\frac{\sqrt{3}}{2}(\omega - \omega_0)\frac{1}{2}\,, \tag{6}$$

que permiten obtener las dos impulsiones restantes:

$$I_3 = \frac{1}{11\sqrt{3}}mR\omega_0(1+e) \quad , \qquad I_1 = \frac{4}{11\sqrt{3}}mR\omega_0(1+e)\,. \tag{7}$$

Alternativamente, podría haberse elegido proyectar las ecuaciones de balance según las direcciones de la varilla y la normal a la misma, obteniéndose igual resultado como es fácil comprobar.

3. Puesto que la variación de cantidad de movimiento del aro es nula, la impulsión en O debe ser igual a la resultante de todas las impulsiones sobre la varilla.

La impulsión vertical $I_{O_V} = 0$, puesto que la variación de cantidad de movimiento vertical de la varilla es nula, y la impulsión horizontal se obtiene a partir de I_1, I_2, I_3:

$$I_{O_H} = (I_3 - I_1)\frac{1}{2} - I_2\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{11}mR\omega_0(1+e)\,.$$