Mecánica

EXAMEN FINAL (12 de junio de 2004)

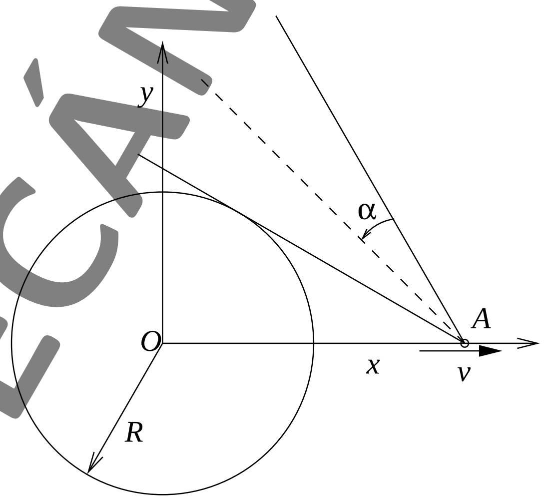
Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un cono de revolución y semiángulo α permanece en contacto con una esfera fija de centro O y radio R. El vértice A del cono tiene una velocidad constante v sobre el eje Ox, y el eje del cono permanece en el plano Oxy. Adicionalmente, el cono gira alrededor de su eje con velocidad constante ω.

Se pide:

1. Velocidad angular (total) del cono.
2. Discutir si el movimiento es o no una rotación pura, calculando la velocidad mínima o de deslizamiento así como el eje helicoidal tangente.
3. Velocidad de deslizamiento del punto de contacto entre el cono y la esfera. Velocidad de rodadura y de pivotamiento del cono respecto a la esfera.



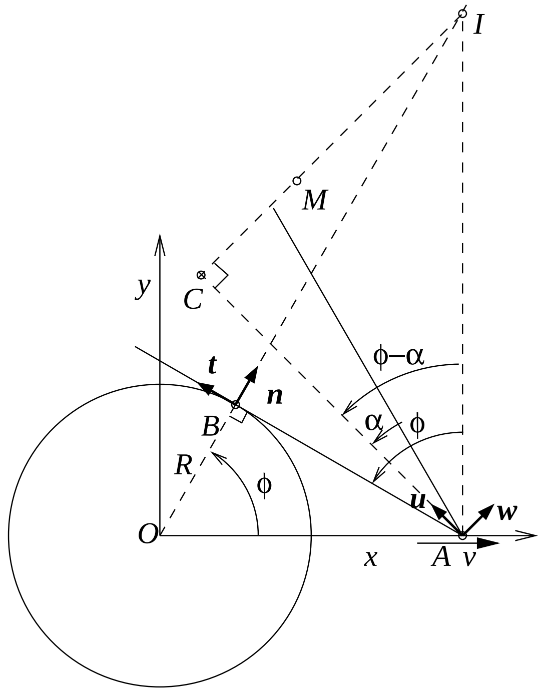
1.— El movimiento del cono se puede interpretar como la composición de dos rotaciones: en primer lugar $\dot{\phi}\,\boldsymbol{k}$ que produce el giro del eje AC del cono dentro del plano Oxy, y en segundo lugar $\omega\,\boldsymbol{u}$ alrededor de este eje.

Si se analiza de forma independiente la rotación $\dot{\phi}\,\boldsymbol{k}$, la velocidad del punto A sigue el eje Ox y la del punto B de contacto con la esfera es tangente a la misma. Por tanto el centro instantáneo de rotación de este movimiento es el punto I según las perpendiculares a las dos direcciones citadas. Por otra parte, derivando la coordenada de A:

$$v = \dot{x}_A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{R}{\cos\phi}\right) = R\dot{\phi}\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^2\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v\cos^2\phi}{R\operatorname{sen}\phi}\ . \qquad (1)$$

En consecuencia, la velocidad de rotación es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\,\boldsymbol{k} + \omega\,\boldsymbol{u} = -\omega\operatorname{sen}(\phi-\alpha)\,\boldsymbol{i} + \omega\cos(\phi-\alpha)\,\boldsymbol{j} + \frac{v\cos^2\phi}{R\operatorname{sen}\phi}\boldsymbol{k}\ . \qquad (2)$$



2.— Se trata de una composición de dos rotaciones cuyos ejes se cruzan: la rotación $\dot{\phi}$ según la dirección $\boldsymbol{k}$ por I, y la rotación ω según la dirección $\boldsymbol{u}$ por A, luego no se trata de una rotación pura sino de un movimiento general de rotación y deslizamiento. Esto puede comprobarse calculando la velocidad mínima o de deslizamiento, a partir por ejemplo de la velocidad del punto A:

$$v_{\min} = \boldsymbol{v}_A \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} = -\frac{v\omega\operatorname{sen}(\phi-\alpha)}{\sqrt{\dot{\phi}^2+\omega^2}} \neq 0 \qquad (3)$$

El eje helicoidal tangente lleva la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ y pasa por un determinado punto M del segmento CI de mínima distancia entre los dos ejes de rotación que calcularemos. Para ello primero obtenemos la velocidad del punto I:

$$y_I = \frac{v}{\dot\phi}, \quad \overline{IC} = y_I \operatorname{sen}(\phi-\alpha), \quad \boldsymbol{v}_I = -\omega\overline{IC}\,\boldsymbol{k} = -v\frac{\omega}{\dot\phi}\operatorname{sen}(\phi-\alpha)\,\boldsymbol{k} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{r}_{IM} = \frac{\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}_I}{\Omega^2} = -\frac{\omega^2}{\dot\phi^2+\omega^2}\overline{IC}\,\boldsymbol{w} = -\frac{v(\omega^2/\dot\phi)\operatorname{sen}(\phi-\alpha)}{\dot\phi^2+\omega^2}\boldsymbol{w}\ . \tag{5}$$

Como comprobación, obtenemos ahora la posición de M relativa a C:

$$\boldsymbol{v}_C = -\dot\phi\overline{IC}\,\boldsymbol{u} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{r}_{CM} = \frac{\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}_C}{\Omega^2} = \frac{\dot\phi^2}{\dot\phi^2+\omega^2}\overline{IC}\,\boldsymbol{w}\ . \tag{6}$$

Por último, hacemos notar también que el procedimiento en principio más directo para obtener el eje helicoidal sería a partir del punto A cuya posición y velocidad son conocidas. La expresión que proporciona un punto de dicho eje arroja

$$\boldsymbol{r}_{AP} = \frac{\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{v}_A}{\Omega^2} = \frac{v}{\dot\phi^2+\omega^2}\left[\dot\phi\,\boldsymbol{j} - \omega\cos(\phi-\alpha)\,\boldsymbol{k}\right] \tag{7}$$

Esta expresión tiene el inconveniente de que el punto P obtenido está fuera del plano Oxy y resulta difícil visualizar la posición precisa del eje. Realizando las operaciones oportunas, el corte del eje paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$ por dicho punto A se produce en el punto definido por

$$\boldsymbol{r} = \frac{v/\dot\phi}{\dot\phi^2+\omega^2}\left[(\dot\phi^2+\omega^2)\cos(\phi-\alpha)\,\boldsymbol{u} + \dot\phi^2\operatorname{sen}(\phi-\alpha)\,\boldsymbol{w}\right] = \underbrace{\overline{AC}\,\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}_{AC}} + \underbrace{\frac{\dot\phi^2}{\dot\phi^2+\omega^2}\overline{IC}\,\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{r}_{CM}}\ .$$

Comprobamos en definitiva que se obtiene el mismo resultado que el antes calculado (6).

3.— Puesto que la esfera es fija, la velocidad de deslizamiento del punto de contacto B será directamente la velocidad de este punto. Calculamos esta empleando la composición de las dos rotaciones:

$$\boldsymbol{v}_B = -\dot\phi\overline{IB}\,\boldsymbol{t} + \omega(\overline{AB}\operatorname{sen}\alpha)\boldsymbol{k} = -R\dot\phi\operatorname{tg}^2\phi\,\boldsymbol{t} + R\omega\operatorname{tg}\phi\operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{k}\ . \tag{8}$$

La velocidad de pivotamiento se obtiene proyectando según la normal $\boldsymbol{n}$,

$$\Omega_p = \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n} = (\dot\phi\,\boldsymbol{k} + \omega\,\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n} = \omega\operatorname{sen}\alpha\ . \tag{9}$$

Finalmente, la de rodadura resulta

$$\boldsymbol{\Omega}_r = \boldsymbol{\Omega} - \Omega_p\,\boldsymbol{n} = (\dot\phi\,\boldsymbol{k} + \omega\,\boldsymbol{u}) - \omega\operatorname{sen}\alpha\,\boldsymbol{n} = \dot\phi\,\boldsymbol{k} + \omega\cos\alpha\,\boldsymbol{t}\ . \tag{10}$$