Mecánica

3.$^{\text{er}}$ EXAMEN PARCIAL (27 de Marzo 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 1.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Enunciar el teorema de Euler sobre el movimiento de un sólido con un punto fijo. *Aplicación:* Sea un sólido rígido $\mathcal{B}$ con un punto fijo O y un triedro cartesiano $Oxyz$ fijo. El sólido $\mathcal{B}$ gira 90° alrededor del eje Oy y a continuación un ángulo de 90° alrededor del nuevo eje Ox' (resultado del primer giro sobre el eje Oy). Obtener la matriz de rotación que relaciona las coordenadas de un punto en la configuración final $(x,y,z)^T$ con las coordenadas iniciales del mismo punto $(x^0,y^0,z^0)^T$. Calcular el eje $\boldsymbol{p}$ alrededor del cual se puede considerar que ha girado el sólido al moverse de la configuración inicial a la final, y la magnitud del ángulo girado. (5 ptos.)

El teorema de Euler se enuncia en los siguientes términos: *El movimiento más general de un sólido con un punto fijo es una rotación alrededor de un cierto eje.* En la aplicación del enunciado, consideramos el vector posición de un punto del sólido expresado en coordenadas cartesianas en el triedro fijo o en el móvil respectivamente: $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{I}+y\,\boldsymbol{J}+z\,\boldsymbol{K} = x^0\boldsymbol{i}+y^0\boldsymbol{j}+z^0\boldsymbol{k}$. Téngase en cuenta que las coordenadas *materiales* serán contantes a lo largo del movimiento, mientras que las *espaciales* (x,y,z) serán variables.

En las dos rotaciones ($(\pi/2)\,\boldsymbol{J}$ seguida de $(\pi/2)\,\boldsymbol{i}'$) el triedro ligado al sólido resulta:

$$\left\|\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}'\right\| = \left\|\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{J} \quad \boldsymbol{K}\right\|[\boldsymbol{R}_1], \quad \left\|\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}\right\| = \left\|\boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{j}' \quad \boldsymbol{k}'\right\|[\boldsymbol{R}_2], \tag{1}$$

$$\text{con } [\boldsymbol{R}_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\boldsymbol{R}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2}$$

$$\left\|\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{k}\right\| = \left\|\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{J} \quad \boldsymbol{K}\right\|[\boldsymbol{R}], \qquad \text{con } [\boldsymbol{R}] = [\boldsymbol{R}_1][\boldsymbol{R}_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

La relación inducida entre coordenadas viene dada por la misma matriz $[\boldsymbol{R}]$,

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{R}]\begin{pmatrix} x^0 & y^0 & z^0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Para una rotación ϕ alrededor de un eje del triedro, por ejemplo el eje x, la matriz es $[\boldsymbol{R}] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ 0 & \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{smallmatrix}\right)$, la traza vale $(1+2\cos\phi)$, invariante escalar. Por tanto, en nuestro caso el ángulo girado se puede obtener a partir de: $1+2\cos\phi = \operatorname{tr}[\boldsymbol{R}] = 0 \;\Rightarrow\; \phi = 2\pi/3 = 120°$. La dirección $\boldsymbol{p}$ alrededor de la que se produce la rotación es el autovector asociado al autovalor unidad de la matriz $\boldsymbol{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} v_2 &= v_1 \\ -v_3 &= v_2 \\ -v_1 &= v_3 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \{\boldsymbol{p}\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Se lanza una placa rectangular homogénea (de masa m y dimensiones $a \times b$) en el campo gravitatorio simplificado, sin resistencia de la atmósfera, con un campo inicial de velocidades general. *Explicar* claramente qué clase de movimiento tiene la placa respecto de su Sistema Centro de Masa. *Obtener* las magnitudes (cinéticas y cinemáticas) que se conservan a lo largo del mismo. *Aplicarlo* al caso $a = b$, con la velocidad angular inicial de módulo Ω_0 formando un ángulo de 60° con la normal a la placa.

El movimiento de la placa alrededor del centro de masas (CDM) es un *movimiento por inercia* o *movimiento de Poinsot*, caracterizado porque en todo momento se verifica $\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{0}$. En consecuencia $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G/\mathrm{d}t = \boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{0}$, luego $\boldsymbol{H}_G = H\,\boldsymbol{K}$ es constante en módulo (H) y dirección ($\boldsymbol{K}$, denominada *dirección invariante*). Por otra parte,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_G}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{I}_G\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

y tomando la derivada respecto del tiempo de la energía cinética relativa al Sistema Centro de Masa:

$$T' = T - \frac{1}{2}Mv_G^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_G\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \tag{2}$$

sustituyendo (1) en (2) resulta:

$$\frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \cdot (-\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad \Rightarrow \quad T' \text{ es constante.} \tag{3}$$

Finalmente, a partir del resultado anterior:

$$T' = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega} = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{K} = \text{cte.} \tag{4}$$

es decir, la proyección de $\boldsymbol{\Omega}$ según la dirección invariante $\boldsymbol{K}$ se mantiene constante, o dicho de otra forma, el extremo del vector $\boldsymbol{\Omega}$ trazado desde G pertenece a un *plano invariante* normal a $\boldsymbol{K}$ y situado a la distancia $\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{K} = 2T'/H$. El vector $\boldsymbol{\Omega}$ define en el espacio un *cono cuádrico* con vértice en G y eje $\boldsymbol{K}$, que será de sección recta circular solo si el tensor de inercia es cilíndrico (en nuestro caso si $a = b$), en cuyo caso el ángulo entre $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{K}$ será constante.

Aplicación: Tomando (sin pérdida de generalidad) el triedro del sólido de manera que en el instante inicial $\boldsymbol{\Omega}$ pertenezca al plano Gxz, y con el eje Gz normal al plano de la placa:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right), \qquad [\boldsymbol{I}_G] = \frac{1}{12}ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Las expresiones del momento cinético y de la energía cinética que resultan son:

$$\boldsymbol{H}_G = ma^2\Omega_0 \left(\frac{\sqrt{3}}{24}\boldsymbol{i} + \frac{1}{12}\boldsymbol{k}\right), \qquad H = \frac{\sqrt{7}}{24}ma^2\Omega_0, \qquad T = \frac{5}{96}ma^2\Omega_0^2 . \tag{6}$$

Finalmente, el ángulo que forman $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ es:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{\Omega_0} = \frac{5\sqrt{7}}{14} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 19{,}107° . \tag{7}$$

que por ser $\boldsymbol{I}_G$ cilíndrico también es constante.