

Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (20 de enero de 2004)

Apellidos	Nombre	N.º	Grupo

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45)

Tiempo: 60 min.

Un cable de longitud total S y peso por unidad de longitud q se encuentra suspendido por sus extremos A y B a sendas rectas horizontales fijas que se cortan formando un ángulo α . Una de las rectas es lisa y la otra es rugosa con coeficiente de rozamiento μ , y cada extremo del cable puede deslizar libremente sobre la recta en la que se apoya. Suponiendo que el cable se encuentra en una posición de equilibrio estricto, se pide:

- Realizar una descripción cualitativa y razonada de la configuración de equilibrio, incluyendo un esquema que muestre claramente la posición relativa del cable respecto de las dos rectas de las que se encuentra suspendido;
- Calcular las reacciones que ejercen las rectas sobre cada uno de los extremos A y B ;
- Calcular la distancia entre A y B y la flecha del cable;
- Para un coeficiente de fricción μ dado, obtener el valor mínimo de α para que sea posible la posición de equilibrio estricto descrita en el enunciado.

1.— La configuración de equilibrio del cable, sometido únicamente a su peso propio, es una catenaria que se encuentra contenida en un plano vertical.

Las reacciones en los extremos se encuentran contenidas en el plano de la catenaria, y por tanto éste ha de ser perpendicular a la recta lisa, como muestra la vista en planta de la Figura 1.

Además, puesto que los extremos A y B están a la misma altura, las reacciones tienen igual módulo. La suma de sus componentes verticales (V) debe igualar al peso del cable, y las componentes horizontales deben ser igual en magnitud (H) y de sentido contrario.

2.— La reacción horizontal en A , de igual magnitud que en B , resulta de la suma vectorial de una componente normal H_A y una fuerza de fricción F_R , por lo que

$$\tan \alpha = F_R / H_A \quad (1)$$

Como la configuración del cable es de equilibrio estricto, esta fuerza de fricción toma el valor:

$$F_R = \mu \sqrt{H_A^2 + V^2} \quad (2)$$

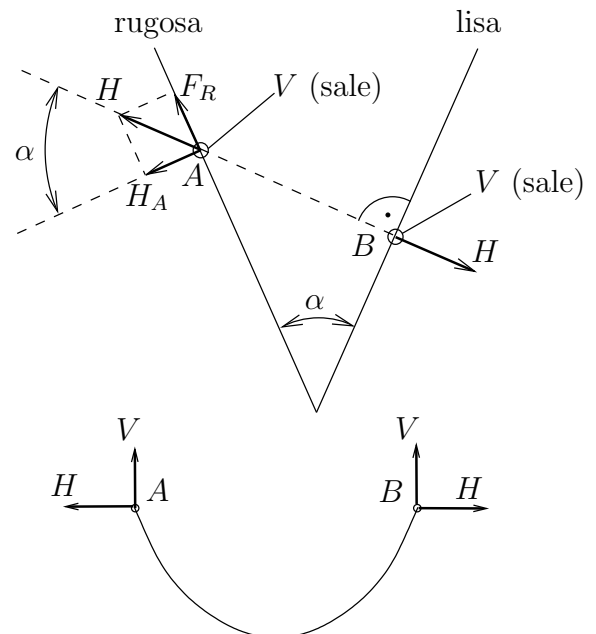


Figura 1: Planta de la configuración de equilibrio y alzado del plano del cable

Introduciendo (2) en (1) y teniendo en cuenta que $V = qS/2$, se obtiene la siguiente expresión para la reacción H_A :

$$H_A = \frac{qS}{2\beta} \cos \alpha \quad ; \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\left(\frac{\text{sen } \alpha}{\mu}\right)^2 - \cos^2 \alpha},$$

y de la Figura 1 se observa que H toma el valor:

$$H = H_A / \cos \alpha = \frac{qS}{2\beta}$$

3.— La distancia L entre A y B se puede calcular, conocido el parámetro de la catenaria a , a partir de la longitud del cable (S):

$$\frac{S}{2} = a \operatorname{senh} \frac{L/2}{a} \quad \Longrightarrow \quad L = 2a \operatorname{argsenh} \frac{S}{2a} \quad (3)$$

El parámetro de la catenaria a se obtiene de la reacción horizontal H :

$$H = qa \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{S}{2\beta},$$

que introducido en (3) proporciona la distancia buscada:

$$L = \frac{S}{\beta} \operatorname{argsenh} \beta$$

La flecha (f) se obtiene también a partir de a mediante la expresión:

$$f = z_B - a = \cosh \frac{S/2}{a} - a = \cosh \beta - \frac{S}{2\beta}$$

4.— La condición para que sea posible la configuración de equilibrio estricto del enunciado es que el parámetro β sea real, es decir:

$$\left(\frac{\text{sen } \alpha}{\mu}\right)^2 - \cos^2 \alpha > 0 \quad \Longrightarrow \quad \tan \alpha > \mu,$$

por lo que el ángulo mínimo es $\alpha_{\min} = \arctan \mu$.