Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (20 de enero de 2004)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 7,5/45) Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teórico-prácticas *dentro del espacio provisto en la hoja.* Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas a tinta y con letra clara. Se puede emplear como borrador la hoja adicional que se les ha repartido, que no deberá entregarse. No se permitirá tener sobre la mesa *ninguna otra hoja,* ni libros ni apuntes de ningún tipo, ni calculadoras.

Demostrar mediante el principio de los trabajos virtuales que las ecuaciones cardinales de la estática ($\sum \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$, $\sum \boldsymbol{M}_G = \mathbf{0}$) son necesarias y suficientes para el equilibrio de un sólido rígido cualquiera. *Probar* que este no es el caso para un sistema no rígido, proponiendo un contraejemplo sencillo. (3,75 ptos.)

Sea G el centro de masa de un sistema rígido discreto formado por masas $\{m_i,\ i = 1, \ldots N\}$. El desplazamiento virtual infinitesimal más general del mismo viene definido por $\delta\boldsymbol{r}_i = \delta\boldsymbol{r}_G + \delta\boldsymbol{\varphi}\wedge\boldsymbol{r}'_i$, siendo $\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G$. Este desplazamiento es compatible con los enlaces del sólido rígido, que obligan a que las distancias entre partículas se conserven. Supondremos que está sometido a fuerzas $\boldsymbol{F}_i$. Aplicando el principio de los trabajos virtuales, la condición necesaria y suficiente para el equilibrio es que se verifique

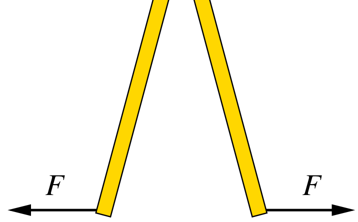
$$
\begin{aligned}
0 = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i &= \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_G) + \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{r}'_i)) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i\right) \cdot \delta\boldsymbol{r}_G + \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}'_i \wedge \boldsymbol{F}_i\right) \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}\ ,
\end{aligned}
$$

para desplazamientos virtuales $(\delta\boldsymbol{r}_G, \delta\boldsymbol{\varphi})$ arbitrarios. (En el desarrollo anterior se ha usado la propiedad de rotación del producto mixto de vectores, $\boldsymbol{F}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{r}'_i) = (\boldsymbol{r}'_i \wedge \boldsymbol{F}_i) \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}$.)

En consecuencia, las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio son:

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{r}_G \text{ arbitrario} \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = \mathbf{0}\ ; \\
\delta\boldsymbol{\varphi} \text{ arbitrario} \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}'_i \wedge \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{M}_G)_i = \mathbf{0}\ .
\end{aligned}
$$

En el caso en que el sistema no sea rígido, las condiciones son necesarias pero no suficientes para el equilibrio. Un ejemplo sencillo puede verse en la figura adjunta, que muestra dos barras articuladas sometidas a sendas fuerzas iguales opuestas y coaxiales en los extremos libres. Es evidente que el sistema se abrirá y no existe equilibrio.



Sea un sistema dinámico con n g.d.l. linealizado para pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio estable. *Expresar* la forma general de las ecuaciones de la dinámica. *Definir* los conceptos de frecuencias propias y modos normales de vibración. *Enunciar y Demostrar* la propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración correspondientes a frecuencias distintas. (3,75 ptos.)

Sea un sistema con n grados de libertad, $\{q_j, j = 1, \dots n\}$, con una posición de equilibrio estable que tomaremos sin pérdida de generalidad en $q_j = 0$. La evolución dinámica linealizada para pequeñas oscilaciones alrededor de dicha posición de equilibrio queda definida por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$\begin{aligned} m_{ij}\ddot{q}_j + c_{ij}\dot{q}_j + k_{ij}q_j &= f_i(t) \qquad &&\text{(notación indicial, sumatorio implícito en } j\text{)} \ ; \\ [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} &= \{\mathbf{f}(t)\} \qquad &&\text{(notación matricial)} \ . \end{aligned}$$

Los términos m_{ij}, c_{ij}, k_{ij} forman respectivamente las matrices de masa, amortiguamiento viscoso y rigidez $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{K}]$. Se obtienen de la siguiente forma:

$$m_{ij} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right|_{\mathbf{q}=0} \ ; \quad c_{ij} = \left.\frac{\partial Q_i^{\text{nc}}}{\partial \dot{q}_j}\right|_{\mathbf{q}=0} \ ; \quad k_{ij} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\mathbf{q}=0} \ .$$

Los términos $f_i(t)$ representan las fuerzas exteriores al sistema, que pueden producir una vibración forzada. En el caso en que no existan el sistema queda en oscilaciones libres,

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \ . \tag{1}$$

Los modos normales de vibración se obtienen para el caso sin amortiguamiento,

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\} \ . \tag{2}$$

Se denominan *modos normales de vibración* a los vectores propios del problema de autovalores generalizado ligado a la ecuación anterior:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{a}\} = \lambda[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\} \ ,$$

estando cada modo normal asociado a un valor propio positivo λ, cuya raíz cuadrada $\omega = \sqrt{\lambda}$ se denomina *frecuencia propia*. Puede comprobarse fácilmente que cada modo normal de vibración $\{\mathbf{a}\}$ con su frecuencia asociada ω define una solución armónica de la ecuación (2):

$$\{\mathbf{q}(t)\} = B\{\mathbf{a}\}\cos(\omega t - \delta) \, , \tag{3}$$

siendo la solución general una combinación lineal de estas:

$$\{\mathbf{q}(t)\} = \sum_{k=1}^{n} B_k\{\mathbf{a}_k\}\cos(\omega_k t - \delta_k) \ , \tag{4}$$

donde las $2n$ constantes (B_k, δ_k) se obtendrán a partir de las condiciones iniciales del problema.

Consideremos ahora dos modos de vibración asociados a frecuencias propias distintas, $(\{\mathbf{a}_1\}, \omega_1)$ y $(\{\mathbf{a}_2\}, \omega_2)$. Se tendrá:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_1\} &= \omega_1^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_1\} \ , \\ [\mathbf{K}]\{\mathbf{a}_2\} &= \omega_2^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_2\} \ ; \end{aligned} \tag{5}$$

premultiplicando la primera ecuación por el vector fila $\|\mathbf{a}_2\|$ y la segunda por $\|\mathbf{a}_1\|$, y teniendo en cuenta la simetría de $[\mathbf{K}]$ y $[\mathbf{M}]$ resulta:

$$\|\mathbf{a}_2\|[\mathbf{K}]\{\mathbf{a_1}\} - \|\mathbf{a}_1\|[\mathbf{K}]\{\mathbf{a_2}\} = 0 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)\|\mathbf{a}_2\|[\mathbf{M}]\{\mathbf{a_1}\}\,,$$

y al ser $\omega_1 \neq \omega_2$, los modos son ortogonales respecto de la matriz de masas:

$$\boxed{\|\mathbf{a}_2\|[\mathbf{M}]\{\mathbf{a_1}\} = 0\,.}$$